TUYỂN CHỌN BẤT ĐẲNG THỨC NĂM 2016

Giáo viên: Mẫn Ngọc Quang

§1: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG

Bài 1: Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa $x^2+y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$

Bài giải

$P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy=2(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-3xy=2(x+y)(2-xy)-3xy$

Đặt $t=x+y$. ĐK : $|t|\le 2$, $xy=\dfrac{t^2-2}{2}$

$P=-t^3-\dfrac{3}{2}t^2+6t+3$, với $|t|\le 2$

Xét $f(t)=-t^3-\dfrac{3}{2}t^2+6t+3$ trên [-2,2] $\Rightarrow f'(t)=-3t^2-3t+6;\ f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-2\end{array}\right.$

Ta có $f(1)=\dfrac{13}{2};\ f(2)=1;\ f(-2)=(-7)$

$\max\limits_{[-2,2]} f(t)=\dfrac{13}{2}$ khi t = 1 nên $\max P=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$\min\limits_{[-2,2]} f(t)=-7$ khi t = -2 nên minP = - 7 $\begin{cases} x+y=-2\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=-1$

Bài 2: Cho $x\ge 0$ và $y\ge 0$ thỏa điều kiện $x+y=2$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+\dfrac{1}{xy+1}$.

Bài giải

Ta có $0\le xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=1$. Đặt $t=xy$, điều kiện $0\le t\le 1$ khi đó

$P=f(t)=t+\dfrac{1}{t+1}\Rightarrow f'(t)=1-\dfrac{1}{(t+1)^2}=\dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$

Bảng biến thiên

x	0		1
P'	0	$+$	
P	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Vậy GTLN $P=\frac{3}{2}$ Khi $x=1;\ y=1$

<u>*Bài 3:*</u> Cho $a,b>0$ thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

<u>*Bài giải*</u>

Ta có $a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\geq(a+b)^2\Rightarrow ab\geq a+b$

$$a^2+b^2+1=(a+b)^2-2ab+1\leq(a+b)^2-2(a+b)+1=(a+b-1)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2+1}\leq|a+b-1|$$

$$P=\left(\frac{a}{b+1}+1\right)+\left(\frac{b}{a+1}+1\right)-2+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

$$=(a+b+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}-2$$

$$\geq(a+b+1)\frac{4}{a+b+2}+\frac{1}{|a+b-1|}-2$$

Đặt $t=a+b$, ta có

$$(a+b)^2\leq2\left(a^2+b^2\right)=(ab)^2\leq\frac{(a+b)^4}{16}\Rightarrow a+b\geq4$$

Xét $f(t)=\frac{4(t+1)}{t+2}+\frac{1}{t-1}-2;t\geq4$ ta được

$$MinP=M\inf(x)=\frac{5}{3}khi\ x=y=2$$

<u>*Bài 4:*</u> Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+x+y=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3x}{y+1}+\frac{3y}{x+1}+\frac{xy}{x+y}-\left(x^2+y^2\right)$$

<u>*Bài giải*</u>

Đặt $t=x+y\Rightarrow xy=3-t;\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2(3-t)=t^2+2t-6$

Ta có $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow3-t\leq\frac{1}{4}t^2\Leftrightarrow t\geq2$

Suy ra $P=\frac{3\left(x^2+y^2\right)+3\left(x+y\right)}{xy+x+y+1}+\frac{xy}{x+y}-\left(x^2+y^2\right)=-t^2+t+\frac{12}{t}-\frac{5}{2}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=-t^2+t+\frac{12}{t}-\frac{5}{2}$ với $t\geq 2$

Ta có $f'\left(t\right)=-2t+1-\frac{2}{t^2}<0,\ \forall t\geq 2$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến với $t\geq 2$

$\Rightarrow P\leq f\left(t\right)\leq f\left(2\right)=\frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x=y=1$.

Bài 5: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $(x+y)^3+4xy\geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3(x^2+y^2)^2-2(x+y)^2-xy(3xy-4)+2015$.

Bài giải

Với mọi số thực x, y ta luôn có $(x+y)^2\geq 4xy$, nên từ điều kiện suy ra

$(x+y)^3+(x+y)^2\geq (x+y)^3+4xy\geq 2\Rightarrow (x+y)^3+(x+y)^2-2\geq 0\Rightarrow x+y\geq 1$ Ta biến đổi P như sau

$P=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2+2xy)-xy(3xy-4)+2015$

$=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+2015 \quad (3)$

Do $x^4+y^4\geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ nên từ (3) suy ra $P\geq \frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+2015$.

Đặt $x^2+y^2=t$ thì $t\geq \frac{1}{2}$ (do $x+y\geq 1$).

Xét hàm số $f(t)=\frac{9}{4}t^2-2t+2015$ với $t\geq \frac{1}{2}$, có $f'(t)=\frac{9}{2}t-2>0$, với $t\geq \frac{1}{2}$ nên hàm số f(t) đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{32233}{16}$.

Do đó GTNN của P bằng $\frac{32233}{16}$, đạt được khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 6: Cho các số dương x, y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{2}{3\left(x+y\right)^3}$.

Bài giải

Xét biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{2}{3\left(x+y\right)^3}$

Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}\leq \frac{2}{x+y}$

Thật vậy, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}\right)^2 \le 2\left(\dfrac{1}{x^2+3y^2}+\dfrac{1}{3x^2+y^2}\right)=\dfrac{8\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)}$

Xét $\dfrac{8\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)}-\dfrac{4}{(x+y)^2}=\dfrac{4\left[2\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2-\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)\right]}{\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)(x+y)^2}$

$=\dfrac{-4(x-y)^4}{\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)(x+y)^2}\le 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}\le \dfrac{2}{x+y}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$

Như vậy, $P \le \dfrac{2}{x+y}-\dfrac{2}{3(x+y)^3}$

Đặt, $t=\dfrac{1}{x+y}, t>0$.

Xét hàm số $f(t)=2t-\dfrac{2t^3}{3} \Rightarrow f'(t)=2-2t^2;\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$ 1	$-$	1		$+\infty$
f'(t)	–	0	+	0	–
f(t)				4/3	

Từ BBT ta thấy GTLN của $f(t)$ là $\dfrac{4}{3}$ khi $t = 1$.

Vậy, GTLN của P là $\dfrac{4}{3}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

Bài 7: Với mọi số thực x,y thỏa mãn điều kiện $2\left(x^2+y^2\right)=xy+1$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^4+y^4}{2xy+1}$

Bài giải

Đặt $t = xy$. Ta có: $xy+1=2\left[(x+y)^2-2xy\right]\ge -4xy \Rightarrow xy \ge -\dfrac{1}{5}$

Và $xy+1=2\left[(x-y)^2+2xy\right]\ge 4xy \Rightarrow xy \le \dfrac{1}{3}$ nên $-\dfrac{1}{5}\le t\le \dfrac{1}{3}$

Suy ra: $P=\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2}{2xy+1}=\dfrac{-7t^2+2t+1}{4(2t+1)}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-7t^2+2t+1}{4(2t+1)}$ có $f'(t)=\dfrac{7\left(-t^2-t\right)}{2(2t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-1(l)\end{array}\right.$

$f\left(-\dfrac{1}{5}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{15}$; $f(0)=\dfrac{1}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{4}$, giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{2}{15}$

Bài 8: Giả sử x,y là các số thực dương thỏa mãn $3(x+y)^2=4\left(x^2+y^2+1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2}+\dfrac{2x+y}{2x^2+y^2}$

Bài giải

Ta có $\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)+y^2}.\dfrac{3}{x+y}\le\dfrac{xy}{2xy+y^2}.\dfrac{3}{x+y}=\dfrac{x}{2x+y}.\dfrac{3}{x+y}$

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{2x+y}{2x^2+y^2}-\dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{y}{x+2y}.\dfrac{3}{x+y}$

Mặt khác, ta cũng có $\dfrac{x}{2x+y}+\dfrac{y}{x+2y}\le\dfrac{2}{3}$, vì bất đẳng thức này tương đương với

$\dfrac{x^2+y^2+4xy}{2x^2+2y^2+5xy}\le\dfrac{2}{3}$, hay $(x-y)^2\ge0$

Từ đó ta có $P-\dfrac{2}{x+y}\le\left(\dfrac{x}{2x+y}+\dfrac{y}{x+2y}\right).\dfrac{3}{x+y}\le\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{x+y}=\dfrac{2}{x+y}$. Suy ra $P\le\dfrac{4}{x+y}$ (1)

Từ giả thiết ta lại có $3(x+y)^2=4\left(x^2+y^2\right)+4\ge2(x+y)^2+4$

Suy ra $(x+y)^2\ge4$, hay $x+y\ge2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $P\le2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2, đạt được khi $x=y=1$

Bài 9: Cho hai số dương x,y thoả mãn $x^2+y^2=1$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+1)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)+(y+1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Bài giải

Đặt $x+y=t\Rightarrow xy=\dfrac{t^2-1}{2}$ Biến đổi $P=x+y+\dfrac{x^2+y^2+x+y}{xy}+2=t+\dfrac{2(t+1)}{t^2-1}+2=t+\dfrac{2}{t-1}+2$

Có $(x+y)^2\ge4xy\Rightarrow t^2\ge4\dfrac{t^2-1}{2}\Rightarrow t^2\le2$

Lại có $0<x,y<1\Rightarrow x>x^2,y>y^2\Rightarrow x+y>1.$ vậy $1<t\le\sqrt{2}$

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{2}{t-1}+2$ trên nửa khoảng $\left(1;\sqrt{2}\right]$

Có $f\left(\sqrt{2}\right)=4+3\sqrt{2}$

Kết luận: $min\,P=\min\limits_{\left(1;\sqrt{2}\right]} f(t)=4+3\sqrt{2}$

Bài 10: Cho x và y là hai số thực dương thay đổi thuộc nửa khoảng (0;1] và x+y=4xy. Tìm gía trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: P= $x^2y+xy^2-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)$.

Bài giải

Ta có: $4xy=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\ge\dfrac{1}{4}.$

$x;y\in(0;1]\Rightarrow(1-x)(1-y)\ge 0\Rightarrow 1-(x+y)+xy\ge 0\Rightarrow 1-4xy+xy\ge 0\Rightarrow xy\le\dfrac{1}{3}.$

P = $x^2y+xy^2-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=xy(x+y)-\dfrac{1}{6}\left[\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(xy)^2}\right]=4(xy)^2+\dfrac{1}{3xy}-\dfrac{8}{3}.$

Đặt t = xy thì P = $t^2+\dfrac{1}{3t}-\dfrac{8}{3}=f(t)$ với $t\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right].$

$f'(t)=8t-\dfrac{1}{3t^2}=\dfrac{24t^3-1}{3t^2}<0,\forall t\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right].$

Do đó $f\left(\dfrac{1}{3}\right)\le f(\text{t})\le f\left(\dfrac{1}{4}\right),\forall t\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right].$

maxP $=-\dfrac{13}{12}$ đạt được khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}.$

minP = $-\dfrac{11}{9}$ đạt được khi và chỉ khi $x=1;y=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=\dfrac{1}{3};y=1.$

Bài 11: Cho hai số thực thỏa mãn $x\ge 1;y\ge 1$ và 3 (x + y) = 4xy

Tìm gía trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: P = $x^3+y^3+3\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}\right)$

Bài giải

Đặt $t=xy$ vì $x\ge 1$ nên $3(x+y)=4x.y\Leftrightarrow 3x^2+3xy=4x^2y\Leftrightarrow xy=\dfrac{3x^2}{4x-3}$

Có $3(x+y)=4x.y\Leftrightarrow x=\dfrac{3y}{4y-3}$ (vì $y\ge 1$). Xét hàm số $f(y)=\dfrac{3y}{4y-3}$ trên $[1;+\infty)$ có

$f'(y)=\dfrac{-9}{(4y-3)^2}<0,\forall y\in[1;+\infty)\Rightarrow f(y)\le f(1)=3\Rightarrow 1\le x\le 3$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2}{4x-3}$ trên $[1;3]\Rightarrow \dfrac{9}{4}\le g(x)\le 3$. Vậy $t\in[\dfrac{9}{4};3]$

Khi đó $P=(x^3+y^3)\left(1+\dfrac{3}{x^3y^3}\right)=\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]\left(+\dfrac{3}{(xy)^3}\right)$

$=\left[\left(\dfrac{4xy}{3}\right)^3-3xy.\dfrac{4xy}{3}\right]\left(1+\dfrac{3}{(xy)^3}\right)=\left(\dfrac{64t^3}{27}-4t^2\right)\left(1+\dfrac{3}{t^3}\right)=\dfrac{64t^3}{27}-4t^2-\dfrac{12}{t}+\dfrac{64}{9}$

Xét hàm số $P(t)=\dfrac{64t^3}{27}-4t^2-\dfrac{12}{t}+\dfrac{64}{9}$ với $t\in[\dfrac{9}{4};3]$

Ta có $P'(t)=\dfrac{64t^2}{9}-8t^2-\dfrac{12}{t^2}=8t\left(\dfrac{8}{9}t-1\right)+\dfrac{12}{t^2}>0,\forall\ t\in[\dfrac{9}{4};3]$

Vậy $MaxP=P(3)=\dfrac{280}{9}$ tại $t=3\Leftrightarrow\begin{cases}xy=3\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases};\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

$MinP=P\left(\dfrac{9}{4}\right)=\left(\dfrac{304}{36}\right)$ tại $t=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{9}{4}\\x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{3}{2}$

Bài 12: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=xy+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$

Bài giải

Ta có $P=xy+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\ge xy+\dfrac{2}{xy}$

Đặt $t=xy$ ta có $0<t=xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{4}$

Khi đó: $P=t+\dfrac{2}{t}=32t+\dfrac{2}{t}-31t\ge 2\sqrt{32.2}-\dfrac{31}{4}=16-\dfrac{31}{4}=\dfrac{33}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min A=\dfrac{33}{4}$

Bài 13: Cho các số thực x,y thỏa mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$.

Bài giải

Ta có $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32\Leftrightarrow(x+y)^2-8(x+y)\le 0\Leftrightarrow 0\le x+y\le 8$

$A=(x+y)^3-3(x+y)-6xy+6\ge(x+y)^3-\dfrac{3}{2}(x+y)^2-3(x+y)+6.$

Xét hàm số: $f(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2-3t+6$ trên đoạn $[0;8]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3t-3,\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Ta có $f(0)=6,\ f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4},\ f(8)=398$. Suy ra $A\ge\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Khi $x=y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Bài 14: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $a^5b+ab^5+2\le(ab+1)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{8ab+1}{2+4ab}$

Bài giải

Ta có $(ab+1)^2\ge a^5b+b^5a+2\ge 2+ab(a^4+b^4)\ge 2+2a^3b^3 \Rightarrow 1\ge ab\ge\dfrac{1}{2}$

Khi đó ta có BĐT quen thuộc : $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\le\dfrac{2}{1+ab}$

$\Rightarrow P\le\dfrac{2}{1+ab}+\dfrac{8ab+1}{2+4ab}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{8t+1}{4t+2}$ với $t=ab;t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

$\Rightarrow f(t)_{max}=f(\dfrac{1}{2})\Rightarrow P_{max}=\dfrac{31}{12}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 15: Cho x, y là các số thực thuộc (0;1) thỏa mãn $\dfrac{(x^3+y^3)(x+y)}{xy}=(1-x)(1-y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+4xy-x^2-y^2$

Bài giải

Ta có: $(1-x)(1-y)=\dfrac{(x^3+y^3)(x+y)}{xy}\Leftrightarrow 1+xy-x-y\ge 4xy\Leftrightarrow 1\ge 3xy+x+y\ge 3xy+2\sqrt{xy}$

Xét $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+4xy-x^2-y^2\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+2xy\le\sqrt{2}.\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}}+2xy$ vì

$x,y\in(0;1)\Rightarrow\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\le\dfrac{2}{1+xy}\quad(*)$

Thật vậy $(*)\Leftrightarrow(2+x^2+y^2)(1+xy)\le 2(1+x^2)(1+y^2)\Leftrightarrow(x-y)^2(1-xy)\ge 0$. Luôn đúng vì $x,y\in(0;1)$

Suy ra $P\le\dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}+2xy,\ xy\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}+2t,t\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$. Có $f'=\dfrac{-1}{(1+t)\sqrt{1+t}}+2>0,\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$

Vậy $P\le f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{56}{9\sqrt{10}}$ nên maxP = $\dfrac{56}{9\sqrt{10}}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{3}$

Bài 15b: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^5b+ab^5+2\le(ab+1)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{8ab+1}{2+4ab}$

Bài giải

Ta có $(ab+1)^2\ge a^5b+b^5a+2\ge 2+ab(a^4+b^4)\ge 2+2a^3b^3\Rightarrow 1\ge ab\ge\frac{1}{2}$

Khi đó ta có BĐT quen thuộc : $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}$

$\Rightarrow P\le\frac{2}{1+ab}+\frac{8ab+1}{2+4ab}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{1+t}+\frac{8t+1}{4t+2}$ với $t=ab;t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

$\Rightarrow f(t)_{max}=f(\frac{1}{2})\Rightarrow P_{max}=\frac{31}{12}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Bài 16: cho x, y là số không âm thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm GTLN và nhỏ nhất của:
$P=5(x^5+y^5)+x^2y^2(5\sqrt{2xy+2}-4xy+12)$

Bài giải

Ta có $0\le x,y\le\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}x^2(x-\sqrt{2})\le 0\\ y^2(y-\sqrt{2})\le 0\end{cases}\Rightarrow x^3+y^3\le\sqrt{2}(x^2+y^2)=2\sqrt{2}$

$4=(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2\Rightarrow 2\ge x+y$

$\Rightarrow 2(x^3+y^3)\ge(x+y)(x^3+y^3)\ge(\sqrt{x}.\sqrt{x^3}+\sqrt{y}.\sqrt{y^3})^2=4\Rightarrow x^3+y^3\ge 2$

Đặt $t=x^3+y^3$. Ta có : $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

Ta có $2=(x^2+y^2)^3=x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)=x^6+y^6+6x^2y^2=(x^3+y^3)^2-2x^2y^3+6x^2y^2$

$\Rightarrow 2x^3y^3-6x^2y^2=t^2-8$

$2(x^3+y^3)=(x^3+y^3)(x^2+y^2)=x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$

$\Rightarrow x^5+y^5+x^2y^2(x+y)=2t$

$P=5(x^5+y^5)+x^2y^2(5\sqrt{2xy+2}-4xy+12)$

$=-4x^3y^3+12x^2y^2+5(x^5+y^5)+5x^2y^2\sqrt{2+2xy}$

$=-2(2x^3y^3-6x^2y^2)+5(x^5+y^5)+5x^2y^2\sqrt{x^2+y^2+2xy}$

$=-2(t^2-8)+5\left[\sqrt{x^2+y^2+2xy}+x^2y^2(x+y)\right]=-2t^2+10t+16=f(t)$

$f'(t)=-4t+10; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

Ta có: $f(2)=28$, $f(\frac{5}{2})=\frac{57}{2}$ và $f(2\sqrt{2})=20\sqrt{2}$

Vậy $MinP=\min_{\left[2;2\sqrt{2}\right]}f(t)=f(2)=28$ và $MaxP=f(\frac{5}{2})=\frac{57}{2}$

Bài 17: Cho $2 \le x \le 3 \le y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy}$

Bài giải

Xét hàm số g(y): $\dfrac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy} = \dfrac{2(x+1)}{y} + \dfrac{y+1}{x}$ với $2 \le x \le 3 \le y$ (0.25đ)

$g'(y) = \dfrac{-2(x+1)}{y^2}, g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2x(x+1)}$ (0.25đ)

Thấy $\min g(y) = g\left(\sqrt{2x(x+1)}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{x} + 1} + \dfrac{1}{x}$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{x} + 1} + \dfrac{1}{x}, 2 \le x \le 3$ có $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}} - \dfrac{1}{x^2} < 0$ nên f(x) nghịch biến trên [2;3]

do đó min f(x) = f(3) $= \dfrac{4\sqrt{6} + 1}{3}$ (0.25đ)

Do đó $B \ge \dfrac{4\sqrt{6} + 1}{3}$, dấu "=" xảy ra khi x = 3 và $y = 2\sqrt{6}$

Vậy min $B = \dfrac{4\sqrt{6} + 1}{3}$

Bài 18: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x + 3y \le 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt[3]{8(x + y) - (x^2 + y^2 + 3)}$

Bài giải

Ta có: $6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \le \left(\dfrac{2x + 2 + 3y + 3}{2}\right)^2 \le 36 \Rightarrow x + y + xy \le 5$

Ta có $5(x^2 + y^2) \ge (2x + y)^2 \Rightarrow \sqrt{5(x^2 + y^2)} \ge 2x + y$ và'

$(x + y - 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x + y + xy + 3) \ge 8(x + y) - (x^2 + y^2 + 3)$

Suy ra $P \ge 2(xy + x + y) - 24\sqrt[3]{2(x + y + xy + 3)}$

Đặt $t = x + y + xy, t \in (0;5], P \ge f(t) = 2t - 24\sqrt[3]{2t + 6}$

Ta có $f'(t) = 2 - \dfrac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}} = 2\dfrac{\sqrt[3]{(2t+6)^2} - 8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} < 0, \forall t \in (0;5]$

Vậy hàm số f(t) nghich biến trên nửa khoảng (0;5]

Suy ra min $f(t) = f(5) = 10 - 48\sqrt[3]{2}$

Vậy min $P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$, khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 19: Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $4x^2+y^2\le 8$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$P=\frac{(2x+6)^2+(y+6)^2+4xy-32}{2x+y+6}$$

Bài giải

Ta có $8\ge 4x^2+y^2\ge\frac{(2x+y)^2}{2}\Leftrightarrow(2x+y)^2\le 16\Leftrightarrow -4\le 2x+y\le 4\Leftrightarrow 2\le 2x+y+6\le 10$

Ta có : $P=2x+y+6+\frac{4}{2x+y+6}$. Đặt $t=2x+y+6, t\in[2;10]$

Xét hàm số: $f(t)=t+\frac{4}{t};t\in[2;10]\Rightarrow f'(t)=1-\frac{4}{t^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2(loai)\end{array}\right.$

Ta có : $f(2)=4, f(10)=\frac{52}{5}$

Vậy GTLN của P bằng $\frac{52}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy GTNN của P bằng $4\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

Bài 20: Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}2y\ge x^2\\y\le -2x^2+3x\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^4+y^4+\frac{2}{(x+y)^2}$.

Bài giải

Từ giả thiết ta có $y\ge 0$ và $\frac{x^2}{2}\le -2x^2+3x\Rightarrow 0\le x\le\frac{6}{5}$ và $x^2+y^2\le x^2+\left(-2x^2+3x\right)^2=2x^2\left(2x^2-6x+5\right)$

Xét hàm số $f(x)=2x^2\left(2x^2-6x+5\right);x\in\left[0;\frac{6}{5}\right]$ ta được $\underset{\left[0;\frac{6}{5}\right]}{Max}\ f(x)=2\Rightarrow x^2+y^2\le 2$

$$P=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+\frac{2}{(x+y)^2}\ge\left(x^2+y^2\right)^2-\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}+\frac{2}{x^2+y^2}$$

Đặt $t=x^2+y^2\Rightarrow P\ge\frac{t^2}{2}+\frac{2}{t}$ $,0<t\le 2$

Xét hàm số $g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{2}{t}, t\in(0;2]\Rightarrow g'(t)=t-\frac{2}{t^2}=\frac{t^3-2}{t^2};g'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$

Lập bảng biến thiên ta có $Min\,P=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ $khi\ x=y=\frac{\sqrt[6]{16}}{2}$

Bài 21: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+2b=12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}+\frac{5}{8(a-b)^2}$$

Bài giải

Từ giả thiết và bất đẳng thức CôSi ta có:

$a^2+2b=12 \Leftrightarrow a^2+4+2b=16 \Leftrightarrow 4a+2b\le 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{4a.2b}\le 16 \Leftrightarrow 0<ab\le 8$

Do đó $P\ge \dfrac{a^2b^2}{64}\left(\dfrac{4}{a^4}+\dfrac{4}{b^4}\right)+\dfrac{ab}{8}.\dfrac{5}{8(a-b)^2}=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)+\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2}$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\,(t>2)$, ta có $P\ge \dfrac{1}{16}t^2+\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{8}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{16}t^2+\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{8}$ trên $(2;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{8}t-\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{(t-2)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên

t	2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{64}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{27}{64}$

Suy ra $P\ge \dfrac{27}{64}$, dấu bằng xảy ra khi $a=2, b=4.$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{27}{64}$ khi $a=2, b=4.$

Bài 22: Cho x, y là các số thực thỏa: $x+y=26\sqrt{x-3}+3\sqrt{y-2013}+2016$ Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(x-1)^2+(y-1)^2+\dfrac{2016+2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$.

Bài giải

$M=x^2+y^2+2xy-2x-2y+2+\dfrac{2016}{\sqrt{x+y+1}}=(x+y+1)^2-4(x+y+1)+5+\dfrac{2016}{\sqrt{x+y+1}}$ Đặt $t=\sqrt{x+y+1}$ thì ta được $M=t^4-4t^2+5+\dfrac{2016}{t}$

Điều kiện của t. Đặt $a=\sqrt{x-3}; b=\sqrt{y-2013}$ ta được $x=a^2+3; y=b^2+2013$ và

$a^2+3+b^2+2013=26a+3b+2016$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=26a+3b\le \sqrt{(26^2+3^2)(a^2+b^2)}$

Hay $0\le a^2+b^2\le \sqrt{685}$

Từ đó ta được $x+y+1=a^2+b^2+2017\in[2017;2072]$ nên $t\in D=\left[\sqrt{2017};\sqrt{2072}\right]$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^4-4t^2+5+\dfrac{2016}{t};t\in D$

$f'\left(t\right)=4t^3-8t-\dfrac{2016}{t^2}=\dfrac{4t^5-8t^4-2016}{t^2}=\dfrac{4t^4\left(t-2\right)-2016}{t^2}>0\forall t\in\left[\sqrt{2017};\sqrt{2072}\right]$

Suy ra $f\left(t\right)$ đồng biến trên D

$\max M=f\left(\sqrt{2072}\right)=4284901+\dfrac{36}{37}$ khi $t=\sqrt{2072}$ ta được $\begin{cases}a^2+b^2=685\\ \dfrac{a}{26}=\dfrac{b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=26\\ b=3\end{cases}$ hay

$x=679;y=2022$

$\min M=f\left(\sqrt{2017}\right)=4060226+\dfrac{2016}{2017}$ khi $t=\sqrt{2017}$ hay $x=3;y=2013$

Bài 23: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y-1=\sqrt{2x-4}+\sqrt{y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=(x+y)^2-\sqrt{9-x-y}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$.

Bài giải

Điều kiện: $x\ge 2;y\ge -1;0<x+y\le 9;$

Ta có

$0\le x+y-1=\sqrt{2}.\sqrt{x-2}+1.\sqrt{y+1}\le\sqrt{3(x+y-1)}\Rightarrow(x+y-1)^2\le 3(x+y-1)$

$\Rightarrow 0\le x+y-1\le 3\Leftrightarrow 1\le x+y\le 4.$

Đặt $t=x+y,t\in[1;4]$, ta có $S=t^2-\sqrt{9-t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$S'(t)=2t+\dfrac{1}{2\sqrt{9-t}}-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}>0,\forall t\in[1;4]$. Vậy *S(t)* đồng biến trên [1;4].

$S_{\max}=S(4)=4^2-\sqrt{9-4}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{33-2\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=4;y=0;$

$S_{\min}=S(1)=2-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2;y=-1.$

Bài 24: Cho *a*, *b* là các số thực thỏa mãn $a+b=2\sqrt{a+2}+3\sqrt{b-2014}+2012$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\dfrac{2015+2ab\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{a+b+1}}$.

Bài giải

$T=\left(a+b+1\right)^2-4\left(a+b+1\right)+5+\dfrac{2015}{\sqrt{a+b+1}}$

Max = $T=4096577+\dfrac{2015}{\sqrt{2026}}$

Min = $T=4044122+\dfrac{2015}{\sqrt{2013}}$

Bài 25: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $4(x^3+8y^6)=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{(x+2y^2+2)^3}{5(x^2+y^2)-5(x+y)+3}$$

Bài giải

$\forall a,b>0$ ta có: $4(a^3+b^3)>(a+b)^3$ (1)

Thật vậy $4(a^3+b^3)\ge a^3+b^3+3ab(a+b)\Leftrightarrow 3(a^3+b^3)\ge 3ab(a+b)\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-2ab+b^2)\ge 0\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0$ (2)

Vì *a,b>0* nên (2) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi *a=b*

Suy ra (1) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (1) với $a=x; b=2y^2$, ta có:

$1=4(x^3+8y^6)=4\left[x^3+(2y^2)^3\right]\ge(x+2y^2)^3\Rightarrow x+2y^2\le 1$

Lại có: $5(x^2+y^2)-5(x+y)+3=5x^2-5x+5y^2-5y+3$

$$=5\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+5\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{10}{4}+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$$

Do đó: $P=\dfrac{(x+2y^2+2)^3}{5(x^2+y^2)-5(x+y)+3}\le\dfrac{(1+2)^3}{\frac{1}{2}}=54$. Ta có: *P=54* khi $\begin{cases}4(x^3+8y^6)=1\\ x=2y^2\\ x=y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{Max}=54$, đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

Bài 26: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\dfrac{x^4(xy+1)^2}{2y^2+2xy+1}$.

Bài giải

Từ giả thiết $x^2+y^2=1$, P được viết lại như sau:

$$P=\frac{y^4+(xy+1)^2}{2y^2+2xy+1}=\frac{y^2(x^2+y^2)+2xy+x^2+y^2}{2y^2+2xy+x^2+y^2}=\frac{2y^2+2xy+x^2}{3y^2+2xy+x^2}$$

Với $y=0, y\ne 1$ thì $y=\dfrac{2}{3}$; với $x\ne 0$, đặt $y=tx$. Khi đó : $P=\dfrac{2t^2+2t+1}{3t^2+2t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+2t+1}{3t^2+2t+1}$ ta có TXĐ: , $f'(t)=\dfrac{-2t^2-2t}{(3t^2+2t+1)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow -2t^2-2t=0\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-1\end{array}\right.; f(0)=1. f(-1)=\dfrac{1}{2}; \lim\limits_{x\to-\infty}f(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(t)=\dfrac{2}{3}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra:

$P_{min}=\frac{1}{2}$ đạt được khi t= -1 hay $\begin{cases} y=-x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

$P_{max}=1$ đạt được khi t=0 hay $\begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 27: Cho x và y là các số thực dương thay đổi sao cho $\log_2(x+y)=3+\log_2 x+\log_2 y$. Tìm gía trị nhỏ nhất của biểu thức: P= $\frac{\sqrt{3^{2x}+3^{-2y}}}{3^{x+1}+3^{-y}}$.

Bài giải

Từ giả thiết $\log_2(x+y)=3+\log_2 x+\log_2 y$ suy ra $x+y=8xy\le 2(x+y)^2 \Rightarrow x+y\ge \frac{1}{2}$

Ta có: $P=\frac{\sqrt{3^{2x}+3^{-2y}}}{3^{x+1}+3^{-y}}=\frac{\sqrt{3^{2x+2y}+1}}{3.3^{x+y}+1}$.Đặt $t=3^{x+y}$. Vì $x+y\ge\frac{1}{2}$ nên $t\ge\sqrt{3}$

Lúc đó $P=\frac{\sqrt{t^2+1}}{3t+1}=f(t)$.

Xét hàm số $f(\text{t})=\frac{\sqrt{t^2+1}}{3t+1}$ trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ta có $f'(\text{t})=\frac{t-3}{(3t+1)^2\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{2}{3\sqrt{3}+1}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Vậy $P \ge \frac{1}{\sqrt{10}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=8xy \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ y=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Bài 28: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn x + y = 1.
Tìm gía trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}$.

Bài giải

Ta dễ dàng CM được BĐT sau $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2} \ge \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}; \forall \begin{cases} a_1,a_2,b_1,b_2 \in R \\ b_1+b_2>0 \end{cases}$.

(tuyệt phẩm Svac-xơ)

Ta có $3\sqrt{1+2x^2}=3\sqrt{\frac{3^2}{9}+\frac{4x^2}{2}} \ge 3\sqrt{\frac{(3+2x)^2}{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}(3+2x)$. (1)

$2\sqrt{40+9y^2}=2\sqrt{\frac{40^2}{40}+\frac{36y^2}{4}} \ge 2\sqrt{\frac{(40+6y)^2}{44}}=\frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow P \ge \frac{3\sqrt{11}}{11}(3+2x)+\frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y)=\frac{\sqrt{11}}{11}(49+6x+6y)=5\sqrt{11}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{3}$

Bài 29 : Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x^2-y^2=-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2xy$

Bài giải

Ta có: $P=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2xy=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+2+2xy=\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2+2+2xy=\frac{1}{x^2y^2}+2xy+2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:
$\frac{1}{x^2y^2}+2xy+2=\frac{1}{x^2y^2}+xy+xy+2 \ge 3+5=5$

Đẳng thức xãy ra khi $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Bài 30: Cho các số thực x, y với $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=x^6+4y^6$

Bài giải

Ta có: $x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2$ $P=x^6+4y^6=x^6+4\left(1-x^2\right)^3$

Đặt $t=x^2$ với $0\le t\le 1$. Xét hàm số $f(t)=t^3+4(1-t)^3$. $f'(t)=3t^2-12(1-t)^2$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	1

Vậy GTNN $P=\frac{4}{9}$ khi $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Bài 31: Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2+y^2+(3x-2)(y-1)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x+y+8\sqrt{4-x-y}$

Bài giải

Ta có giả thiết $x^2+y^2+(3x-2)(y-1)=0 \Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)+2=-xy-y$

Vì x, y không âm nên $-xy-y\le 0$. Suy ra $(x+y)^2-3(x+y)+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le x+y\le 2$

Đặt $t=x+y$, khi đó $t\in[1;2]$

Ta có $P=x^2+y^2+x+y+8\sqrt{4-x-y}\le (x+y)^2+(x+y)+8\sqrt{4-(x+y)}=t^2+t+8\sqrt{4-t}$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t+8\sqrt{4-t}$ với $t\in[1;2]$

Ta có $f'(t)=2t+1-\frac{4}{\sqrt{4-t}}$, với mọi $t\in(1;2)$. Chú ý rằng $f'(t)>3-\frac{4}{\sqrt{2}}>0$ với mọi $t\in(1;2)$

Suy ra f(t) đồng biến trên $[1;2]$. Do đó $\max\limits_{[1;2]} f(t)=f(2)=6+8\sqrt{2}$. Suy ra $P<6+8\sqrt{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} xy=0 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=0$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $6+8\sqrt{2}$, đạt khi $x=2; y=0$

Bài 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-6x-2y+5=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $6x+2y=x^2+y^2+5$ (1) và $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ (2)

Do (1) nên: $P=\frac{x^2+4xy+4y^2+x+2y+4}{x+2y+1}=x+2y+\frac{4}{x+2y+1}$

Đặt $t=x+2y \Rightarrow P=t+\frac{4}{t+1}$. Theo bất đẳng thức B.C.S ta có:

$\left[(x-3)+2(y-1)\right]^2 \le 5\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]=25\ (4) \Rightarrow -5\le (x-3)+2(y-1)\le 5 \Rightarrow 0\le t\le 10\ (1)$

Do (1) nên theo bđt Cauchy ta có: $t+1+\dfrac{4}{t+1}\ge 4 \Rightarrow P\ge 3$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $t+1=\dfrac{4}{t+1} \Leftrightarrow (t+1)^2=4 \Leftrightarrow t=1$

Khi đó:. $\begin{cases} x+2y=1 \\ (x-3)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ (-2y-2)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 5y^2+6y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=0 \\ x=\dfrac{17}{5}; y=-\dfrac{6}{5} \end{array}\right.$. Vậy $P_{\min}=3$ đạt được khi $x=1; y=0$ hoặc $x=-\dfrac{6}{5}, y=\dfrac{17}{5}$

Bài 33: Cho các số thực x, y, z dương và thỏa mãn $4\left(x^2-x+1\right)\le 16\sqrt{x^2z}-3x(y+z)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{y+3x(x+1)}{x^2z}+\dfrac{16}{(y+1)^3}-10\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{y}{x^3+2}}$

Bài giải

Cách 1:

Từ giả thiết ta có:

$4\left(x^2-x+1\right)\le 16x\sqrt{yz}-3x(y+z)^2 \Rightarrow 4\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)\le 16\sqrt{yz}-3(y+z)^2 \ \le 16\sqrt{yz}-3.4yz$

$\Rightarrow 4\sqrt{yz}-3yz\ge x+\dfrac{1}{x}-1\ge 1, t=\sqrt{yz}>0 \Rightarrow 3t^2-4t+1\le 0 \Rightarrow t\le 1 \Rightarrow yz\le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{z}\ge y$

$T=\dfrac{y+3x(x+1)}{x^2z}+\dfrac{16}{(y+1)^3}-10\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{y}{x^3+2}}=\dfrac{y^2+3xy}{x^2yz}+\dfrac{3}{z}+\dfrac{16}{(y+1)^3}-10\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{y}{x^3+2}}$

Ta có $yz\le 1 \Rightarrow \dfrac{y^2+3xy}{x^2yz}\ge \dfrac{y^2+3xy}{x^2}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+3\dfrac{y}{x}$

$\dfrac{3}{z}+\dfrac{16}{(y+1)^3}\ge 3y+\dfrac{16}{(y+1)^3}=(y+1)+(y+1)+(y+1)+\dfrac{16}{(y+1)^3}-3\ge 4.2-3=5$

$-10\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{y}{x^3+2}}\ge -10\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{y}{x^3+1+1}}\ge -10\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{y}{3x}}=-10\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

Từ đó: $T\ge \left(\dfrac{y}{x}\right)^2+3\dfrac{y}{x}-10\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{y}{x}}>0 \Rightarrow T\ge f(x)=t^4+3t^2-10t+5$

Ta có $f'(t)=4t^3+6t-10=2(t-1)\left(2t^2+2t+5\right)$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $T \geq -1 \Rightarrow \min_{t>0} T = -1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Cách 2:

Ta có $\sqrt{\dfrac{y}{x^3+2}} = \sqrt{\dfrac{y}{x^3+1+1}} \leq \sqrt{\dfrac{y}{3x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{y}{x}.1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{\dfrac{y}{x}+1}{2}$; $\dfrac{y^2}{x^2}+1 \geq 2\dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{y^2}{x^2} \geq 2\dfrac{y}{x}-1$

Suy ra: $T \geq 2\dfrac{y}{x}-1+3\dfrac{y}{x}+5-10\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{\dfrac{y}{x}+1}{2} \Rightarrow T \geq -1$

$\Rightarrow MinT = -1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Cách 3 Chỉ thông qua BĐT bunhiacopxki đánh giá xử lí 2 đại lượng căn đầu tiên .

Ta có $xy.1+1.1+1.1 \leq \sqrt{(x^2y^2+1^2+1^2)(1^2+1^2+1^2)} = \sqrt{3(x^2y^2+2)} \Rightarrow \sqrt{x^2y^2+2} \geq \dfrac{xy+2}{\sqrt{3}}$

Tương tự $\sqrt{z^4+2} \geq \dfrac{z^2+2}{\sqrt{3}}$

Bài 34: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{27x^3+10}{9y} + \frac{3y^2+4}{8x}$$

Bài giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $(x;y) = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức AM-CM ta có:

$$P = \left(\frac{3x^3}{y}+\frac{y}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3y^2}{8x}+\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{9x}{8}+\frac{1}{2x}\right)+\left(\frac{5y}{8}+\frac{10}{9y}\right)-\frac{21}{8}x-\frac{9}{8}y-\frac{2}{3}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x^3}{y}.\frac{y}{2}.\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{3y^2}{8x}.\frac{3x}{2}}+2\sqrt{\frac{9x}{8}.\frac{1}{2x}}+2\sqrt{\frac{5y}{8}.\frac{10}{9y}}-\frac{21}{8}x-\frac{9}{8}y-\frac{2}{3}$$

$$= 3x+\frac{3}{2}y+\frac{5}{3}-\frac{21}{8}x-\frac{9}{8}y-\frac{2}{3} = \frac{3}{8}(x+y)+\frac{5}{2} \geq \frac{3}{4}+\frac{5}{2} = \frac{13}{4}$$

Vậy $\min P = \dfrac{13}{4}$

§2: BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN ĐỐI XỨNG ĐIỂM RƠI ĐẸP

Bài 1: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + x = 1

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xy}$

Bài giải

Ta có: $P=\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{x^2}{x}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}(*)$

Nhận thấy: $x^2+y^2-xy\geq xy\forall x,y\in R$. Do đó: $x^3+y^3\geq xy(x+y)\forall x,y>0$ hay $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y\forall x,y>0$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}\geq y+z\forall y,z>0$, $\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{z}\geq z+x\forall x,z>0$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức vừa nhân được ở trên, kết hợp với (*), ta được:

$P\geq 2(x+y+z)=2\forall x,y,z>0$ và x + y +z = 1

Hơn nữa, ta lại có P = 2 khi $x+y+z=\frac{1}{3}$. Vì vậy minP = 2

Bài 2: Chứng minh $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{3}{4}$

Bài giải

Ta có x,y,z và $xyz=1$ nên luôn tồn tại hai số cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc hai số cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là x, y

$\Rightarrow(x-1)(y-1)\geq 0\Rightarrow x+y\leq xy+1$

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq\frac{2}{(1+x)(1+y)}=\frac{2}{1+x+y+xy}\geq\frac{2}{2+2xy}=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}$$

Ta có: $\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}-\frac{3}{4}=\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}\geq 0\Rightarrow\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z =1

Bài 3: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn a(a – 1) + b(b – 1) + c(c – 1) $\leq\frac{3}{4}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$

Bài giải

Ta có $9=\left(\sqrt{a+1}\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\sqrt{b+1}\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\sqrt{c+1}\frac{1}{\sqrt{c+1}}\right)^2\le P.(a+b+c+3)\Rightarrow P\ge\frac{9}{a+b+c+3}$

Giả thiết $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-(a+b+c)\le\frac{4}{3}(1)$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ nên nếu đặt t = a + b + c thì $\frac{1}{3}t^2-t\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow 0<t\le 4$

Xét hàm số $f(t)=\frac{9}{t+3}$ trên (0;4] ta có: $f'(t)=\frac{-9}{(t+3)^2}<0$

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) nghịch biến trên (0;4] => $\min_{(0;4]} f(t)=f(4)=\frac{9}{7}$

GTNN của P là $\frac{9}{7}$ khi $\begin{cases}a+b+c=4\\a+1=b+1=c+1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{4}{3}$

Bài 4: Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$ CMR: $P=\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)}+\frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)}+\frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)}\ge\frac{1}{3}$

Lời giải

Ta viết lại $P=\sum\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{4}{9}\sum\left(\frac{a}{ab+1}\right)^2$

Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}\Rightarrow P\ge\frac{4}{9}\sum\left(\frac{a}{ab+1}\right)^2=\frac{4}{9}\sum\left[\frac{xz}{y(y+z)}\right]^2$

Lại có $\sum\left[\frac{xz}{y(y+z)}\right]^2\overset{Cauchy-Schwarz}{\ge}\frac{1}{3}\left[\sum\frac{xz}{y(y+z)}\right]^2$

Tiếp $\sum\frac{xz}{y(y+z)}\overset{Cauchy-Schwarz}{\ge}\frac{(xy+yz+xz)^2}{2xyz(x+y+z)}\ge\frac{3}{2}$

Truy hồi ta được $P\ge\frac{1}{3}$

Bài 5: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác thỏa mãn $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=1$

Chứng minh BĐT : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Bài giải

Đặt $\begin{cases}a+b-c=x\\b+c-a=y\\c+a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+z}{2};b=\frac{x+y}{2};c=\frac{z+y}{2}$ và $xyz=1$

BĐT trở thành : $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5\ge\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz}{6}=\frac{(x+y+z)^2-(xy+yz+xz)}{6}$

Ta có : $xy+yz+xz\ge 3\Rightarrow \dfrac{(x+y+z)^2-(xy+yz+xz)}{6}\le \dfrac{(x+y+z)^2-3}{6}$

Vậy ta cần chứng minh : $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^5\ge \dfrac{(x+y+z)^2-3}{6}$

Xét hàm số $f(t)=(\dfrac{t}{3})^5-\dfrac{t^2-3}{6}$ với $t=x+y+z\ge 3\Rightarrow f(t)\ge f(3)=0$

Vậy BĐT ban đầu được chứng minh.

Bài 6: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}+\frac{x(yz+1)^2}{z^2(xz+1)}+\frac{y(xz+1)^2}{x^2(xy+1)}$$

Bài giải

Ta có : $P\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}\dfrac{x(yz+1)^2}{z^2(xz+1)}\dfrac{y(xz+1)^2}{x^2(xy+1)}}=3\sqrt[3]{\dfrac{(xy+1)(yz+1)(zx+1)}{xyz}}$

$$\Rightarrow P\ge 3\sqrt[3]{(xyz+\frac{1}{64xyz})+\frac{63}{64xyz}+(x+\frac{1}{4x})+(y+\frac{1}{4y})+(z+\frac{1}{4z})+\frac{3}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}+\frac{27.63}{64(x+y+z)^3}+1+1+1+\frac{3}{4}(\frac{9}{x+y+z})}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}+\frac{27.63}{64.\frac{27}{8}}+3+\frac{3}{4}.\frac{18}{3}}=\frac{15}{2}\Rightarrow P_{\min}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$$

Bài 7: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a\sqrt{3}}{b^2+c^2}+\frac{b\sqrt{3}}{c^2+a^2}+\frac{c\sqrt{3}}{a^2+b^2}$$

Bài giải

Ta có : $\dfrac{a\sqrt{3}}{b^2+c^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4-a^2}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau $\dfrac{a\sqrt{3}}{4-a^2}\ge \dfrac{9}{16}a^2$ (1)

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow (a\sqrt{3}-2)^2(3a^2+4a\sqrt{3})\ge 0$ (Luôn đúng $\forall a>0$)

$$\Rightarrow P\ge \frac{9}{16}(a^2+b^2+c^2)=\frac{9}{4}$$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Bài 8: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a+b+c)\left(\frac{3a-b}{a^2+b}+\frac{3b-c}{b^2+bc}+\frac{3c-a}{c^2+ca}\right)$$

Bài giải

Ta có $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow \frac{1}{b}\ge\frac{3a-b}{a(a+b)}$

$$\Rightarrow (a+b+c)\frac{3a-b}{a^2+ab}=\frac{3a-b}{a}+\frac{c(3a-b)}{a(a+b)}\le 3-\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow P\le 9-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=9$$

Bài 9: Cho các số thực dương x,y,z thay đổi thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx}+\frac{z^3}{z+xy}+\frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$

Bài giải

Ta có $\sqrt{1+xy+x+y}=\sqrt{(x+1)(y+1)}\le\frac{x+y+2}{2}=\frac{z+1}{2}$

$$z+xy=x+y+1+xy=(x+1)(y+1)\le\frac{(z+1)^2}{4}$$

Lại có $\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+xz}=\frac{x^4}{x^2+xyz}+\frac{y^4}{y^2+xyz}\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz}\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+(x^2+y^2)z}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+xz}\ge\frac{(x+y)^2}{2(1+z)}=\frac{(z-1)^2}{2(z+1)}$$

$$\Rightarrow P\ge f(z)=\frac{(z-1)^2}{2(z+1)}+\frac{4z^3}{(z+1)^2}+\frac{28}{(z+1)^2}$$

Đạo hàm và lập BBT $\Rightarrow f(z)\ge f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{53}{8}\Rightarrow P_{\min}=\frac{53}{8}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3};z=\frac{5}{3}$

Bài 10: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}}+\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}}+\frac{c^2(3+a)}{a}$$

Bài giải

Ta có $\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}\le\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}\le\frac{4a+6b}{2}=2a+3b$

$$\Rightarrow \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}}\ge\frac{25a^2}{2a+3b}$$

Tương tự ta có $\dfrac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} \ge \dfrac{25a^2}{2b+3c}$

Lại có : $\dfrac{c^2(3+a)}{a} = \dfrac{3c^2}{a} + c^2 + 2c - 2c = c^2(\dfrac{9}{3a} + \dfrac{4}{2c}) + c^2 - 2c \ge \dfrac{25c^2}{2c+3a} + c^2 - 2c$

$\Rightarrow P \ge 25\sum(\dfrac{a^2}{2a+3b}) + c^2 - 2c \ge 25.\dfrac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} + (c-1)^2 - 1 \ge 14$

Vậy $P_{\min} = 14 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 11: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+y}{xy}\sqrt{x^2y^2+2} + \dfrac{1}{z}\sqrt{z^4+2} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{2xy+z^2}}$

Bài giải

Ta có $\sqrt{x^2y^2+2} = \sqrt{x^2y^2+1+} \ge \dfrac{xy+1+1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{z^4+2} = \sqrt{z^4+1+1} \ge \dfrac{z^2+1+1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\dfrac{x+y+z}{2xy+z^2}} \ge \sqrt{\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\dfrac{x+y+z}{3}} \Rightarrow P \ge \dfrac{x+y}{xy}.\dfrac{xy+1+1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{z}.\dfrac{z^2+1+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{3}}$

$\ge \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}) + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{3}} \ge \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \dfrac{18}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{3}}$

Khi đó $P \ge \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \dfrac{9}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{12}} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{12}} + \dfrac{3}{2(x+y+z)} + \dfrac{1}{x+y+z}(\dfrac{9}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2})$

$\ge 2\sqrt{3} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3}(\dfrac{9}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2}) = 1 + 3\sqrt{3}$

Vậy $P_{\min} = 1 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 12: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $9(a^4+b^4+c^4) - 25(a^2+b^2+c^2) + 48 = 0$

Tìm GTNN của biểu thức : $P = \dfrac{a^2}{b+2c} + \dfrac{b^2}{c+2a} + \dfrac{c^2}{a+2b}$

Bài giải

Ta có $\begin{cases} a^4+b^4+c^4 \ge \dfrac{(a+b+c)^4}{27} \\ a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \ge \dfrac{(a+b+c)^4}{3} - \dfrac{25(a+b+c)^2}{3} + 48 \Rightarrow 16 \ge (a+b+c)^2 \ge 9$

$\Rightarrow a+b+c \ge 3$. Khi đó $P \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \dfrac{a+b+c}{3} \ge 1$

Vậy $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Câu 13: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm GTNN của biểu thức : $P=\dfrac{a^2}{(1-a)^2+5bc}+\dfrac{16b^2-27(a+bc)^2}{36(a+c)^2}$

Bài giải

Ta có $P=\dfrac{a^2}{(1-a)^2+5bc}+\dfrac{16b^2-27(a+bc)^2}{36(a+c)^2}=\dfrac{a^2}{(1-a)^2+5bc}+\dfrac{16b^2-27\left[a(a+b+c)+bc\right]^2}{36(a+c)^2}$

$=\dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\dfrac{16b^2-27(a+b)^2(a+c)^2}{36(a+c)^2}=\dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\dfrac{4b^2}{9(a+c)^2}-\dfrac{3}{4}(a+b)^2$

Mặt khác $\dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc}\ge\dfrac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5}{4}(b+c)^2}=\dfrac{4a^2}{9(b+c)^2}$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}\right)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{(a+b)^2}{ab+ac+ba+bc}\right)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2$

$\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{(a+b)^2}{2ab+(a+b)c}\right)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{(a+b)^2}{\dfrac{(a+b)^2}{2}+(a+b)c}\right)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2$

$\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{(1-c)^2}{\dfrac{(1-c)^2}{2}+(1-c)c}\right)^2-\dfrac{3}{4}(1-c)^2=\dfrac{8}{9}\left(1-\dfrac{2}{1+c}\right)^2-\dfrac{3}{4}(1-c)^2$

Xét hàm số $f(c)=\dfrac{8}{9}\left(1-\dfrac{2}{1+c}\right)^2-\dfrac{3}{4}(1-c)^2$ với $c\in(0;1)\Rightarrow f(c)\ge f(\frac{1}{3})=\dfrac{-1}{9}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{-1}{9}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Câu 14: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc\ge1$.

Chứng minh bất đẳng thức $P=\sum\dfrac{a}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a},y=\sqrt{b},z=\sqrt{c}\Rightarrow P=\sum\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+yz}}$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x^2+yz}+\sqrt{y^2+xz}+\sqrt{z^2+xy}}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz)}}$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3\left[(x+y+z)^2-(xy+yz+xz)\right]}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3(x+y+z)^2-9}} \quad (\text{Do } xy+yz+xz \geq 3)$$

Đặt $(x+y+z)^2 = t \Rightarrow P^2 \geq \frac{t^2}{3(t-3)} = \frac{3t+15}{12} + \frac{t-3}{12} + \frac{3}{t-3} \geq \frac{3.9+15}{12} + 2\sqrt{\frac{3}{12}} = \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Bài 15: Cho ba số thực dương x, y, z sao cho $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{(1-x^4)^2} + \frac{y}{(1-y^4)^2} + \frac{z}{(1-z^4)^2} \geq \frac{81\sqrt{3}}{64}$$

(Trích đề thi thử trường chuyên Hà Nội Amsterdam)

Lời giải

Để cho tiện tính "nhẩm" ta chuyển $(x,y,z) \to (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ thế thì $a^2+b^2+c^2=3$

Ta cần chứng minh $\frac{a}{(9-a^4)^2} + \frac{b}{(9-b^4)^2} + \frac{c}{(9-c^4)^2} \geq \frac{3}{64}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b^2+c^2)^2(2a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{b}{(c^2+a^2)^2(2b^2+c^2+a^2)^2} + \frac{c}{(a^2+b^2)^2(2c^2+a^2+b^2)^2} \geq \frac{3}{64}$$

Áp dụng BĐT am-gm:

$$\frac{a}{(b^2+c^2)^2(2a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{a^3(b^2+c^2)}{128} + \frac{a^2(b^2+c^2)}{128} + \frac{2a^2(2a^2+b^2+c^2)}{256} \geq \frac{5a^2}{64}$$

Đánh giá tương tự rồi cộng lại chú ý $\sum_{a,b,c}\left(\frac{a^2(b^2+c^2)}{128} + \frac{2a^2(2a^2+b^2+c^2)}{256}\right) = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{64} = \frac{9}{64}$

Ta được $\frac{a}{(9-a^4)^2} + \frac{b}{(9-b^4)^2} + \frac{c}{(9-c^4)^2} \geq \frac{3}{32} - \frac{a^3(b^2+c^2)+b^3(c^2+a^2)+c^3(a^2+b^2)}{128}$

Chú ý $\sum_{a,b,c} a^3(b^2+c^2) = \sum_{a,b,c} a^3(3-a^2) = \sum_{a,b,c}\left[-a^2(a-1)^2(a+2)+2a^2\right] \leq 2\sum_{a,b,c} a^2 = 6$

Từ đó Ta có ĐPCM dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 16: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $a+b+c=3$ tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} + \frac{c^2(a+3)}{a}$$

Lời giải

Ta có

$$2a^2+7b^2+16ab \leq 2a^2+7b^2+2(a^2+b^2)+12ab = 4a^2+9b^2+12b = (2a+3b)^2 \Rightarrow \sqrt{2a^2+7b^2+16ab} \leq 2a+3b$$

Tương tự: $\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}\le 2b+3c$ từ đó suy ra :

$P\ge \frac{25a^2}{2a+3b}+\frac{25b^2}{2b+3c}+\frac{c^2(a+3)}{a}$. Bây giờ dùng phương pháp 'tiếp tuyến' ta sẽ thiết lập được:

$\frac{25a^2}{2a+3b}\ge 8a-3b$ và $\frac{25b^2}{2b+3c}\ge 8b-3c$ nên $\frac{25a^2}{2a+3b}+\frac{25b^2}{2b+3c}\ge 8a+5b-3c$ do đó

$P\ge 8a+5b-3c+\frac{c^2(a+3)}{a}=15-8c+3a+c^2+\frac{3c^2}{a}=(c-1)^2+\frac{3(c-a)^2}{a}+14\ge 14$

Vậy $\min P=14$ khi $a=b=c=1$

Bài 17: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0$ và $a+b+c=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1$

Thật vậy $\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}\ge\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$

$\Rightarrow\sqrt{a+bc}\ge a+\sqrt{bc}$. Tương tự $\sqrt{b+ac}\ge b+\sqrt{ac}$ và $\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+a+b+c$

$\Leftrightarrow\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1\Rightarrow$ đpcm

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=3$

Bài 18: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{a+c-b}+\frac{5}{a+b-c}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y},x>0,y>0.$

$S=\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\Rightarrow S\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=a,$ nên $\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}=2\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}\right)=2\left(a+\frac{3}{a}\right)\ge 4\sqrt{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}.$

Bài 19: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=8$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=(x+y)(y+z)(z+x)+\frac{48}{\sqrt{x+y+z+3}}$

Bài giải

Ta có $(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-8$

Mặt khác $(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)=24(x+y+z) \Rightarrow xy+yz+zx \geq 2\sqrt{6(x+y+z)}$

Do đó $P \geq 2(x+y+z)\sqrt{6(x+y+z)}+\dfrac{48}{\sqrt{x+y+z+3}}-8$

Đặt $t=x+y+z \Rightarrow t \geq 3\sqrt[3]{xyz}=6 \Rightarrow P \geq f(t)=2t\sqrt{6t}+\dfrac{48}{\sqrt{3+t}}-8 \Rightarrow f'(t)=\dfrac{3\sqrt{6t(t+3)^3}-24}{\sqrt{(t+3)^3}}>0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến $\Rightarrow f(t) \geq f(6)=80$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 80, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=2$

Bài 20: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{b+2c}{1+a}+\dfrac{a+2c}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$

Bài giải

Ta có $P+2=(a+b+2c+1)\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\right)+6\ln(a+b+2c)$

Mặt khác $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \dfrac{2}{1+\dfrac{ab+1}{2}}=\dfrac{4}{3+ab} \geq \dfrac{4}{ab+bc+ca+c^2}=\dfrac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \dfrac{16}{(a+b+2c)^2}$

Đặt $t=a+b+2c \Rightarrow P \geq f(t)=\dfrac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t$ với $t \geq 0$ $\Rightarrow f'(t)=\dfrac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$

$\Rightarrow P \geq f(t) \geq f(4)=5+6\ln 4$

Vậy, GTNN của P là 3 + 6ln4 khi $a=b=c=1$.

Bài 31: Cho $a,b,c>0$ .Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \dfrac{1}{abc}$

Bài giải

Ta có: $x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Rightarrow a^3+b^3+abc \geq ab(a+b)+abc=ab(a+b+c) \Rightarrow \dfrac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \dfrac{1}{ab(a+b+c)}$

Tương tự ta có $\dfrac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \dfrac{1}{bc(a+b+c)}; \dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \dfrac{1}{ca(a+b+c)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \dfrac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\dfrac{1}{abc}$

Bài 32: Cho các số thực dương a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn: $a+b+c=1$

Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b^2}{b+c}+\dfrac{b+c^2}{c+a}+\dfrac{c+a^2}{a+b} \geq 2$

Bài giải

Ta có: $VT=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)=A+B$

$$A+3=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\geq\frac{1}{2}3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}}=\frac{9}{2}$$

$$1^2=(a+b+c)^2\leq\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a)$$

Từ đó ta có $VT\geq\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2=VP$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 33: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x+y+z=3\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$$

Bài giải

Ta có: $(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\overset{Cauchy}{\geq}3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.\frac{3}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=9$

$\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq\frac{9}{xy+yz+zx}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Do đó: $P\geq\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{9}{xy+yz+zx}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{xy+yz+zx}+\frac{1}{xy+yz+zx}+\frac{7}{xy+yz+zx}$

$$\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}}+\frac{7}{xy+yz+zx}$$

Mặt khác: $\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\overset{Cauchy}{\leq}\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{3}=\frac{(x+y+z)^2}{3}=9$

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq 3xy+3yz+3zx$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)^2\geq 3xy+3yz+3zx\Leftrightarrow xy+yz+zx\leq 9$$

Suy ra: $P\geq\frac{3}{9}+\frac{7}{9}=\frac{10}{9}$. Vậy $\min P=\frac{10}{9}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{3}$

Bài 34: Cho 3 số thực dương x,y,z thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{yz}\right)+y\left(\frac{y^2}{3}+\frac{2}{zx}\right)+z\left(\frac{z^2}{3}+\frac{2}{xy}\right)$$

Bài giải

Ta có: $P=\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)+2\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$

Áp dụng bất đẳng thức: $a^2+b^2\geq 2ab,\forall a,b\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 2\frac{xy+yz+zx}{xyz} \Rightarrow P \ge \left(\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}\right)+\left(\frac{y^3}{3}+\frac{2}{y}\right)+\left(\frac{z^3}{3}+\frac{2}{z}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^3}{3}+\frac{2}{t}$ với *t>0* $\Rightarrow f'(t) = t^2 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^4-2}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{2}$

Vậy $P \ge 4\sqrt[4]{8}$ đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \sqrt[4]{2}$. Hay $P_{\min} = 4\sqrt[4]{8}$

Bài 35: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4(b+1)(c+1)}+\frac{1}{b^4(c+1)(a+1)}+\frac{1}{c^4(a+1)(b+1)} \ge \frac{3}{4}$$

Bài giải

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ khi đó vế phải trở thành $\frac{x^3}{(y+1)(z+1)}+\frac{y^3}{(z+1)(x+1)}+\frac{z^3}{(x+1)(y+1)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy ta có

$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)}+\frac{y+1}{8}+\frac{z+1}{8} \ge \frac{3x}{4}\ ;\ \frac{y^3}{(z+1)(x+1)}+\frac{x+1}{8}+\frac{z+1}{8} \ge \frac{3y}{4}\ ;\ \frac{z^3}{(x+1)(y+1)}+\frac{x+1}{8}+\frac{y+1}{8} \ge \frac{3z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(y+1)(z+1)}+\frac{y^3}{(z+1)(x+1)}+\frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \ge \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

Bài 36: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương

Ta có $\sqrt{x+y} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{(x+y).\frac{4}{3}} \le \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{x+y+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x+y+\frac{4}{3}\right)$

Tương tự: $\sqrt{y+z} \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\left(y+z+\frac{4}{3}\right)$; $\sqrt{z+x} \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\left(z+x+\frac{4}{3}\right)$

Suy ra: $S \le \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+2y+2z+4) = 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = $\frac{2}{3}$.

Vậy MaxS = $2\sqrt{3}$ khi x = y = z = $\frac{2}{3}$.

Bài 37: Cho các số thực $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{y^2+2}+\frac{1}{z^2+2}$$

Bài giải

Không mất tổng quát, giả sử x là số lớn nhất trong 3 số x, y, z, suy ra $yz \le 1 \le x$

Ta chứng minh $\frac{1}{y^2+2}+\frac{1}{z^2+2} \le \frac{2}{yz+2}$ với mọi y,z dương thỏa mãn $yz \le 2$. Thật vậy

$$\frac{1}{y^2+2}+\frac{1}{z^2+2} \le \frac{2}{yz+2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2+2}-\frac{1}{yz+2}+\frac{1}{z^2+2}-\frac{1}{yz+2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{y(z-y)}{(y^2+2)(yz+2)}+\frac{z(y-z)}{(z^2+2)(yz+2)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-y}{yz+2}\left(\frac{y}{y^2+2}-\frac{z}{z^2+2}\right) \le 0 \Leftrightarrow \frac{(z-y)^2(yz-2)}{(yz+2)(y^2+2)(z^2+2)} \le 0$$

BĐT này đúng, do y, z dương và $yz \le 1 < 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi y = z

Suy ra $P \le \frac{1}{x^2+2}+\frac{2}{yz+2}=\frac{1}{x^2+2}+\frac{2x}{1+2x}$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy, ta có $x^2+2=(x^2+1)+1 \ge 2x+1$, dấu bằng xảy ra khi x = 1

Suy ra $P \le \frac{1}{x^2+2}+\frac{2x}{1+2x} \le \frac{1}{2x+1}+\frac{2x}{1+2x}=1$

Vậy, GTLN của P bằng 1, đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Bài 38: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x+y+z \le \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Bài giải

Ta có $A=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{xyz}+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$ ta có $0<t=\sqrt[3]{xyz}<\frac{x+y+z}{3} \le \frac{1}{2}$

Khi đó: $P \ge 3t+\frac{3}{t}=12t+\frac{3}{t}-9t \ge 2\sqrt{36}-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Vậy $\min A=\frac{15}{2}$

Bài 40: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A=\frac{7}{a^2+b^2+c^2}+\frac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Bài giải

Ta có $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca=\frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$

Do đó: $A=\frac{7}{a^2+b^2+c^2}-\frac{121}{7\left(1-(a^2+b^2+c^2)\right)}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$ Vì $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$ nên $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$

Suy ra $t=a^2+b^2+c^2<a+b+c=1$

Mặt khác $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\overset{B.C.S}{\leq}3(a^2+b^2+c^2)$

Suy ra $t=a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$. Vậy $t\in\left[\frac{1}{3};1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{7}{t}+\frac{121}{7(1-t)}; t\in\left[\frac{1}{3};1\right)$ $\quad f'(t)=-\frac{7}{t^2}+\frac{121}{7(1-t)^2}$ $\quad f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{18}$

Suy ra $f(t)\geq\frac{324}{7}; \forall t\in\left[\frac{1}{3};1\right)$. Vậy $A\geq\frac{324}{7}$ với mọi a,b,c thỏa điều kiện đề bài.

Hơn nữa, với $a=\frac{1}{2}; b=\frac{1}{3}; c=\frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=\frac{7}{18} \\ a+b+c=1\end{cases}$ và $A=\frac{324}{7}$

Vậy $\min A=\frac{324}{7}$

Bài 41: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2\leq 4abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{ab}}$$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$P\leq\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}}+\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ca}}}+\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}+\frac{1}{\sqrt[4]{bc}}+\frac{1}{\sqrt[4]{ca}}\right)$$

Với các số thực x,y,z ta có $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0\Leftrightarrow xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$

Do đó $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}+\frac{1}{\sqrt[4]{bc}}+\frac{1}{\sqrt[4]{ca}}\right)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}}\leq\frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$. Suy ra $P\leq\frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$

Từ giả thiết, ta có $a+b+c\leq 4032\sqrt{abc}$. Do đó $P\leq 2016$

Với $a=b=c=\frac{1}{1344^2}$, ta có $P=2016$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2016

Bài 42: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=(x-1)(y-1)(z-1)$$

Bài giải

Từ giả thiết ta có $x<xyz\Rightarrow yz>1$ tương tự cũng có: $zx>1, xy>1$. Do đó có tối đa 1 trong 3 số x,y,z bé hơn 1.

TH1: Có đúng 1 số bé hơn 1, chẳng hạn: $x<1; y\geq 1; z\geq 1$ khi đó $P\leq 0$

TH2: $x\geq 1; y\geq 1, z\geq 1$

Đặt $x-1=a, y-1=b, z-1=c$. Với $a,b,c>0$

Giả thiết bái toán trở thành $a+b+c+3=(a+1)(b+1)(c+1)\Leftrightarrow ab+bc+ca+abc=2$ (*)

Đặt $t=\sqrt[3]{abc}$, ta có: $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3t^2$ (**)

Từ (*), (**) suy ra: $t^3+3t^2\le 2\Leftrightarrow (t+1)(t+1+\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3})\le 0\Leftrightarrow t\le\sqrt{3}-1$

Do đó $\sqrt[3]{abc}\le\sqrt{3}-1\Leftrightarrow abc\le(\sqrt{3}-1)^3$ hay: $(x-1)(y-1)(z-1)\le(\sqrt{3}-1)^3$

Dấu bằng xảy ra khi: $x=y=z=\sqrt{3}$ Vậy $\max P=(\sqrt{3}-1)^3$

Bài 43: Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn: $\log_2 a+\log_8 b^3+\log_{32} c^5=0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$

Bài giải

Từ giả thiết suy ra $a,b,c>0$ và $a.b.c=1$, không mất tính tổng quát ta giả sử $a=\max\{a,b,c\}\Rightarrow 0<bc\le 1$

Ta chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+bc}}$ (1) và $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{1+bc}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (2)

với (1) ta có: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2\le\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}=\dfrac{1+b^2+1+c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}$

$=1+\dfrac{1-(bc)^2}{(1+b^2)(1+c^2)}\le 1+\dfrac{1-(bc)^2}{(1+bc)^2}=\dfrac{2}{1+bc}$ hay $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2\le\dfrac{4}{1+bc}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+bc}}$

với (2) ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{1+a}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{1+bc}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{1+a}+\dfrac{2}{\sqrt{1+bc}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+bc}}\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+bc}}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{1+3a}{2(1+a)}-\sqrt{\dfrac{2a}{1+a}}=\dfrac{1+3a-2\sqrt{2a}.\sqrt{1+a}}{2(1+a)}$

$=\dfrac{(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a})^2}{2(1+a)}\ge 0$ đúngSuy ra $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{1+bc}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta có : $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ dấu bằng khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 44: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}}+\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}}+\frac{c^3(3+a)}{a}$$

Bài giải

Ta có: $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2$. Nên ta sẽ có:

$$\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}=\sqrt{2a^2+7b^2+2ab+14ab}\le\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}\le\frac{4a+6b}{2}=2a+3b$$

Vậy ta sẽ có: $\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} \ge \frac{25a^2}{2a+3b}$ (1) Tương tự ta cũng có: $\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} \ge \frac{25b^2}{2b+3c}$

Mặt khác theo $Cauchy-shwarz$ Ta có: $\frac{3c^2}{a}+2c=c^2\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{c}\right) \ge \frac{25c^2}{3a+2c}$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta sẽ có:

$$P \ge 25\left(\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\right)+c^2-2c \ge 25.\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}+c^2-2c=5(a+b+c)+c^2-2c$$

+ Mà $a+b+c=3$ theo giả thiết nên ta sẽ có: $P \ge c^2-2c+15=(c-1)^2+14 \ge 14$

Vậy GTNN của $P=14$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 45: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$

Bài giải

Đặt $A=P^3$ Ta có $A=\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)=\frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân có :

$$1-ab \ge 1-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4}=\frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4} \ge \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$$

Tương tự có: $1-bc \ge \frac{(1+a)\sqrt{(1+c)(1+b)}}{2}$; $1-ca \ge \frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$

Do đó $A \ge \frac{1}{8}\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)^2$. Mà $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \ge \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \ge 4^3$

Do đó min P = 8 đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 46: Cho $x,y,z>0; x^2+y^2+z^2=3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+y}{xy}\sqrt{x^2y^2+2}+\frac{1}{z}\sqrt{z^4+2}+\sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}$$

Bài giải

Cách 1:

$$P=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\sqrt{x^2y^2+2}+\frac{1}{z}\sqrt{z^4+2}+\sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{2}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{z^2+\frac{2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}$$

$$\ge \sqrt{(x+y+z)^2+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^2}+\sqrt{\frac{x+y+z}{3}},(2xy+z^2 \le x^2+y^2+z^2=3)$$

$$P \ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \frac{162}{(x+y+z)^2}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\ge \sqrt{\left(\frac{(x+y+z+\frac{9}{x+y+z}+\frac{9}{x+y+z}}{3}\right)2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\ge \frac{x+y+z}{3} + \frac{6\sqrt{3}}{x+y+z} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$t = \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}, (t \le 1)$$

$$P \ge \sqrt{3}.t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{t^2} + t \ge 1 + 2\sqrt{3}$$

Dấu "=" khi : x = y = z = 1

<u>Cách 2:</u>

Ta có $\sqrt{x^2y^2+2} = \sqrt{x^2y^2+1+1} \ge \dfrac{xy+1+1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{z^4+2} = \sqrt{z^4+1+1} \ge \dfrac{z^2+1+1}{\sqrt{3}}$

$$\sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} \ge \sqrt{\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\Rightarrow p \ge \frac{x+y}{xy}.\frac{xy+1+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{z}.\frac{z^2+1+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\ge \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\ge \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{18}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

Khi đó : $P \ge \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \dfrac{9}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{12}} + \sqrt{\dfrac{x+y+z}{12}} + \dfrac{3}{2(x+y+z)} + \dfrac{1}{x+y+z}(\dfrac{9}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2})$

$$\ge 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}(\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) = 1 + 3\sqrt{3}$$

Vậy $P_{\min} = 1 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

<u>Bài 47:</u> Cho các số thực *x,y,z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F = \sqrt{3x^2+7y} + \sqrt{5y+5z} + \sqrt{7z+3x^2}$$

<u>Bài giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$F^2 \le 3[6x^2+12(y+z)] \le 18\left[x^2 + 2\sqrt{2(y^2+z^2)}\right] = 18\left[x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)}\right]$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)}$ trên miền xác định $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$

$f'(x)=2x-\dfrac{4x}{\sqrt{2(3-x^2)}}(\forall x\in(-\sqrt{3};\sqrt{3}))$ $f'(x)=0$ trên $(-\sqrt{3};\sqrt{3})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$; $f\left(\pm\sqrt{3}\right)=3, f(0)=2\sqrt{6}, f(\pm1)=5$

$\Rightarrow \max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3})} f(x)=5\Rightarrow F^2\le 18.5=90\Rightarrow F\le 3\sqrt{10}$. Dấu bằng khi *x=y=z=1*

$\max F=3\sqrt{10}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 48: Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{7}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Bài giải

Ta có $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$

Do đó $A=\dfrac{7}{a^2+b^2+c^2}-\dfrac{121}{7\left[1-(a^2+b^2+c^2)\right]}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2\Rightarrow t\in\left[\dfrac{1}{3};1\right)\Rightarrow P=f(t)=\dfrac{7}{t}-\dfrac{121}{7(1-t)}$

$\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{7}{t^2}+\dfrac{121}{7(1-t)^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{18}$

Suy ra $f(t)\ge\dfrac{324}{7}$; $\forall t\in\left[\dfrac{1}{3};1\right)$. Vậy $A\ge\dfrac{324}{7}$ với mọi $a;b;c$ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{3};c=\dfrac{1}{3}$ thì $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=\dfrac{7}{18}\\a+b+c=1\end{cases}$ và $A=\dfrac{324}{7}$

Vậy $\min A=\dfrac{324}{7}$

Bài 49: Cho *a, b, c* là các số thực dương thoả mãn *a* + *b* + *c* = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\dfrac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

Bài giải

Áp dụng Bất đẳng thức $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ ta có:

$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=9\text{abc}>0\ \Rightarrow ab+bc+ca\ge 3\sqrt{abc}$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3,\forall a,b,c>0$. Thật vậy:

$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc\ge\ 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+\text{abc}=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

Khi đó $P\le\dfrac{2}{3\left(1+\sqrt{abc}\right)}+\dfrac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q$. Đặt $\sqrt[6]{abc}=t$. Vì $a,b,c>0$ nên $0<abc\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=1$

Xét hàm số $Q=\frac{2}{3\left(1+t^3\right)}+\frac{t^2}{1+t^2}$, $t\in(0;1]\Rightarrow Q'(t)=\frac{2t(t-1)\left(t^5-1\right)}{\left(1+t^3\right)^2\left(1+t^2\right)^2}\geq 0,\quad \forall t\in(0;1]$

Do hàm số đồng biến trên $(0;1]$ nên $Q=Q(t)\leq Q(1)=\frac{5}{6}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $P\leq\frac{5}{6}$

Vậy $\max P=\frac{5}{6}$, đạt được khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.

Bài 50: Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $x\geq y\geq z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y$.

Bài giải

Ta có $\frac{x}{z}+xz\geq 2x;\frac{z}{y}+yz\geq 2z\Rightarrow P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y\geq 2x-xz+2z-yz+3y$

$=2(x+z)+y(x+y+z)-xz-yz=2(x+z)+y^2+x(y-z)$

Do $x>0$ và $y\geq z$ nên $x(y-z)\geq 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y\geq 2(x+z)+y^2=2(3-y)+y^2=(y-1)^2+5\geq 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x=y=z=1$

Bài 51: Cho các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$.

Bài giải

Đặt $A=P^3$ Ta có $A=\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)=\frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân có :

$1-ab\geq 1-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4}=\frac{\left[(1+a)+(1+b)\right](1+c)}{4}\geq\frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$

Tương tự có: $1-bc\geq\frac{(1+a)\sqrt{(1+c)(1+b)}}{2}$; $1-ca\geq\frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$

Do đó $A\geq\frac{1}{8}\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)^2$. Mà $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3\geq 4^3$

Do đó min P = 8 đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 52: Cho *x,y,z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\frac{9}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$x^2+y^2+z^2+4\ge\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(z+2)^2\ge\frac{1}{4}(x+y+z+2)^2$

$(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\le\frac{1}{2}(x+y)(x+y+4z)=\frac{1}{6}(3x+3y)(x+y+4z)\le\frac{2}{3}(x+y+z)^2$

Suy ra $P\le\frac{8}{x+y+z+2}-\frac{27}{2(x+y+z)^2}$. Đặt $t=x+y+z,$ t>0 Khi đó $P\le\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}$ với t>0

Ta có $f'(t)=\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}=0\Leftrightarrow\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}=0\Leftrightarrow t=6,$ f(6)=$\frac{5}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $P\le f(t)\le\frac{5}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi *x=y=z=2*

Vậy giá trị lớn nhất của *P* bằng $\frac{5}{8}$. Khi *x=y=z=2*

Bài 53: Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng
$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\le\sqrt{2(a+b+c)}$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\sqrt{ab+ca}+\sqrt{b}\sqrt{bc+ab}+\sqrt{c}\sqrt{ca+bc}\right)^2$

$\le(a+b+c)2(ab+bc+ca)=2(a+b+c)\Rightarrow$ bất đẳng thức cần chứng minh

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 54: Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}$

Bài giải

$$P=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}=\left(x-\frac{xy^2}{x+y^2}\right)+\left(y-\frac{yz^2}{y+z^2}\right)+\left(z-\frac{zx^2}{z+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow P=x+y+z-\left(\frac{xy^2}{x+y^2}+\frac{yz^2}{y+z^2}+\frac{zx^2}{z+x^2}\right)$$

Ta có $x+y^2\ge2y\sqrt{x}\Rightarrow\frac{xy^2}{x+y^2}\le\frac{xy^2}{2y\sqrt{x}}=\frac{y\sqrt{x}}{2};\frac{yz^2}{y+z^2}\le\frac{yz^2}{2z\sqrt{y}}=\frac{z\sqrt{y}}{2};\frac{zx^2}{z+x^2}\le\frac{zx^2}{2x\sqrt{z}}=\frac{x\sqrt{z}}{2}$

$$\Rightarrow P\ge(x+y+z)-\left(\frac{y\sqrt{x}}{2}+\frac{z\sqrt{y}}{2}+\frac{x\sqrt{z}}{2}\right)$$

Mặt khác $y\sqrt{x} \le y\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{xy+y}{2}; z\sqrt{y} \le z\dfrac{y+1}{2} = \dfrac{yz+z}{2}; x\sqrt{z} \le x\dfrac{z+1}{2} = \dfrac{xz+x}{2}$

$\Rightarrow P \ge x+y+z-\dfrac{x+y+z+xy+yz+xz}{4} \Rightarrow P \ge \dfrac{3}{4}(x+y+z)-\dfrac{1}{4}(xy+yz+zx) = \dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{4}(xy+yz+zx)$

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \ge 3(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \le 3 \Rightarrow P \ge \dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{4}.3 = \dfrac{3}{2}$

Dấu = xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$ xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài 55: Cho các số dương *a,b,c* thỏa mãn *a+b+c=3.*

Chứng minh rằng: $\dfrac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2}+\dfrac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2}+\dfrac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \ge 24$

Bài giải

Ta sử dụng bất đẳng thức cơ bản với 2 số bất kỳ *x,y* ta có $(x+y)^2 \ge 4xy$ dấu bằng khi *x=y*

Ta có: $(1+a)^2(1+b)^2 = [(1+a)(1+b)]^2 = [(1+ab)+(a+b)]^2 \ge 4(1+ab)(a+b)$

Suy ra: $\dfrac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} \ge \dfrac{4(1+ab)(a+b)}{1+c^2} = \dfrac{4a(1+b^2)+4b(1+a^2)}{1+c^2} = 4a\dfrac{1+b^2}{1+c^2}+4b\dfrac{1+a^2}{1+c^2}$

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} \ge 4b\dfrac{1+c^2}{1+a^2}+4c\dfrac{1+b^2}{1+a^2}; \dfrac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \ge 4c\dfrac{1+a^2}{1+b^2}+4a\dfrac{1+c^2}{1+b^2}$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có:

Vế trái: $\ge 4a\left(\dfrac{1+b^2}{1+c^2}+\dfrac{1+c^2}{1+b^2}\right)+4b\left(\dfrac{1+a^2}{1+c^2}+\dfrac{1+c^2}{1+a^2}\right)+4c\left(\dfrac{1+b^2}{1+a^2}+\dfrac{1+a^2}{1+b^2}\right)$

Ta có $\dfrac{1+b^2}{1+c^2}+\dfrac{1+c^2}{1+b^2} \ge 2; \dfrac{1+a^2}{1+c^2}+\dfrac{1+c^2}{1+a^2} \ge 2; \dfrac{1+b^2}{1+a^2}+\dfrac{1+a^2}{1+b^2} \ge 2$ *a,b,c* dương

Suy ra: vế trái $\ge 8(a+b+c) \ge 24$ điều phải chứng minh

Dấu bằng khi $a=b=c=1$

Bài 56: cho các số thực dương a,b sao cho $2(a^2+b^2)+a+b=6$

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P = 6\left(\dfrac{a^2+1}{a^2+a}+\dfrac{b^2+1}{b^2+b}\right)+\dfrac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+5}}$

Lời giải:

Chú ý là : $6 = 2(a^2+b^2)+a+b \ge (a+b)^2+(a+b) \Rightarrow (a+b-2)(a+b+3) \le 0 \Leftrightarrow a+b \le 2$. quay lại bài toán : áp dụng bđt am-gm:

$$6\left(\dfrac{a^2+1}{a^2+a}+\dfrac{b^2+1}{b^2+b}\right) \ge 12\sqrt{\dfrac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab(a+1)(b+1)}} \ge 12\sqrt{\dfrac{2a.2b}{ab(a+1)(b+1)}} = \dfrac{24}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \ge \dfrac{48}{a+b+2}$$

$P \ge \dfrac{48}{a+b+2}+\dfrac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+5}} = \dfrac{48}{t+2}+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+5}}$ với $t = a+b \le 2$

Xét $f(t)=\frac{48}{t+2}+\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}$ ta có $f'(t)=\frac{5}{\sqrt{(t^2+5)^3}}-\frac{48}{(t+2)^2}\le\frac{5}{\sqrt{125}}-\frac{48}{16}<0$.

Do đó f(t) nghịch biến => $f(t)\ge f(2)=\frac{38}{3}$.vậy min $P=\frac{38}{3}.khi:a=b=1$

Bài 57: Cho x,y,z là ba số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:
$P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}$.

Bài giải

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có $\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}}\le\frac{1-x+\frac{2}{3}}{2}=\frac{5-3x}{6}$

Tương tự, ta thu được $\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}}+\sqrt{(1-y).\frac{2}{3}}+\sqrt{(1-z).\frac{2}{3}}\le\frac{5-3x}{6}+\frac{5-3y}{6}+\frac{5-3z}{6}=2\Rightarrow P\le\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

§3: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ QUEN THUỘC

Bài 1: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 3

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$

Bài giải

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3=ab+bc+ca\ge3\sqrt[3]{(abc)^2}\Rightarrow abc\le1$

$1+a^2(b+c)\ge abc+a^2(b+c)=a(ab+bc+ca)=3a\Rightarrow\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{3a}(1)$

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\le\frac{1}{3b}(2);\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3c}(3)$

Cộng (1), (2), (3) theo vế với vế ta có:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ca}{3abc}=\frac{1}{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi abc = 1, ab + bc + ac = 3 => a = b = c = 1, (a, b, c > 0)

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương . tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$

Bài giải

Ta có $P+11=\left(\frac{3b+3c}{2a}+2\right)+\left(\frac{4a+3c}{3b}+1\right)+\left(\frac{12b-12c)}{2a+3c}+8\right)=(4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3c}\right)$

Với mọi x, y > 0, ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$. Đẳng thức xảy ra khi x = y > 0

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\ge\frac{4}{2a+3b}$; $\frac{4}{2a+3b}+\frac{4}{2a+3c}\ge\frac{16}{4a+3b+3c}$

$\Rightarrow\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3b}\ge\frac{16}{4a+3b+3c}$. Do đó $P+11\ge16\Leftrightarrow P\ge5$

Vậy min P = 5, đạt được khi 2a = 3b = 3c

Bài 3: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện: xy + yz + zx = 2012xyz

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$

Bài giải

Chứng minh bổ đề: $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge4;\forall x,y>0\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (*) Dấu "=" có khi x = y.

Giả thiết xy + yz + zx = 2012xyz $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2012$

Ta có $\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{(x+y)+(x+z)}\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(1)$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{1}{x+2y+z}\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)(2)$ và $\frac{1}{x+y+2z}\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)(3)$

Cộng vế với vế (1); (2) và (3) ta nhận được:

$$A=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2012}{4}=503$$

A lớn nhất = 503 đạt được khi $x=y=z=\frac{3}{2012}$

Bài 4: Cho 2 số x, y thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x>0>y \\ \frac{x^2}{2y}-3x+6y-\frac{4y^2}{x}-4\leq\frac{6}{xy} \end{cases}$.

Tìm GTNN của biểu thức: $P=2x^4+32y^4+4x^2y^2-2x^2-8y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4y^2}-5$

Bài giải

Do (1) nên (2) $\Rightarrow x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3-8xy\geq 12 \Leftrightarrow (x-2y)^3-8xy\geq 12(3)$

Đặt 2y = -u, u >0, (3) trở thành $12\leq(x+u)^3+4xu\leq(x+u)^3+(x+u)^2\Rightarrow 2\leq x+u$

Ta có $P=2(x^4+u^4)+x^2u^2-2(x^2+u^2)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}\right)-5$ (0.25đ)

Ta có: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}\geq\frac{4}{x^2+u^2}(4)$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = u. Từ (4) suy ra

$$P=2(x^2+u^2)^2-2(x^2+u^2)-3x^2u^2+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}\right)-5\geq 2(x^2+u^2)^2-2(x^2+u^2)-\frac{3}{4}(x^2+u^2)^2+\frac{4}{x^2+u^2}-5$$

$$=\frac{5}{4}(x^2+u^2)^2-2(x^2+u^2)+\frac{4}{x^2+u^2}-5$$

Đặt $t=x^2+u^2\Rightarrow P\geq f(t)=\frac{5}{4}t^2-2t+\frac{4}{t}-5, t\geq 2(Do\, x+u\geq 2)$

F(t) liên tục trên $[2;+\infty)$, $f'(t)=\frac{5t^2-4t^2-8}{2t^2}=\frac{4t^2(t-1)+t^2-8}{2t^2}>0, \forall t>2$ nên

Bài 5: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)}+\frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)}+\frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)}\geq\frac{1}{3}$$

Bài giải

Ta có $P=\dfrac{1}{\left(b+\dfrac{2}{a}\right)\left(2b+\dfrac{1}{a}\right)}+\dfrac{1}{\left(c+\dfrac{2}{b}\right)\left(2c+\dfrac{1}{b}\right)}+\dfrac{1}{\left(a+\dfrac{2}{c}\right)\left(2a+\dfrac{1}{c}\right)}$

Vì a, b, c dương và abc = 1 nên đặt $a=\dfrac{y}{x},b=\dfrac{z}{y},c=\dfrac{x}{z}$ với x, y,z > 0

Khi đó $VT=\dfrac{1}{\left(\dfrac{y}{x}+2\dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{z}{x}+2\dfrac{y}{x}\right)}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{z}{y}+2\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{x}{y}+2\dfrac{z}{y}\right)}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{z}+2\dfrac{y}{z}\right)\left(\dfrac{y}{z}+2\dfrac{x}{z}\right)}$

$=\dfrac{x^2}{(y+2z)(z+2y)}+\dfrac{y^2}{(z+2x)(x+2z)}+\dfrac{z^2}{(x+2y)(y+2x)}$

Ta có: $(y+2z)(z+2y)=yz+2y^2+2z^2+4yz=2(y+z)^2+5yz\le\dfrac{9}{2}(y^2+z^2)$

Suy ra $\dfrac{x^2}{(y+2z)(z+2y)}\ge\dfrac{2}{9}\dfrac{x^2}{y^2+z^2}(1)$

Tương tự có: $\dfrac{y^2}{(z+2x)(x+2z)}\ge\dfrac{2}{9}\dfrac{y^2}{x^2+z^2}(2)$; $\dfrac{z^2}{(x+2y)(y+2x)}\ge\dfrac{2}{9}\dfrac{z^2}{y^2+x^2}(3)$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được $VT\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{x^2}{y^2+z^2}+\dfrac{y^2}{x^2+z^2}+\dfrac{z^2}{y^2+x^2}\right)$

Lại có $\left(\dfrac{x^2}{y^2+z^2}+\dfrac{y^2}{x^2+z^2}+\dfrac{z^2}{y^2+x^2}\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\dfrac{1}{y^2+z^2}+\dfrac{1}{x^2+z^2}+\dfrac{1}{y^2+x^2}\right)-3$

$=\dfrac{1}{2}\left((x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\right)\left(\dfrac{1}{y^2+z^2}+\dfrac{1}{x^2+z^2}+\dfrac{1}{y^2+x^2}\right)-3\ge\dfrac{1}{2}.9-3=\dfrac{3}{2}$

Bài 6: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn : $x+y+z\ge3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{yz+\sqrt{8+x^3}}+\dfrac{y^2}{zx+\sqrt{8+y^3}}+\dfrac{z^2}{xy+\sqrt{8+z^3}}$

Bài giải

Lại có $\sqrt{8+x^3}=\sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)}\le\dfrac{6-x+x^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

$\sqrt{8+y^3}=\sqrt{(2+y)(4-2y+y^2)}\le\dfrac{6-y+y^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}y=1\\y=2\end{array}\right.$

$\sqrt{8+z^3}=\sqrt{(2+z)(4-2z+z^2)}\le\dfrac{6-z+z^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}z=1\\z=2\end{array}\right.$

$P\ge2.\dfrac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)-(x+y+z)+x^2+y^2+z^2+18}=2.\dfrac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-(x+y+z)+18}$

Đặt t = x + y + z điều kiện $t\ge3$. Ta có $P\ge\dfrac{2t^2}{t^2-t+18}$ với $t\ge3$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2}{t^2-t+18}$ trên $[3;+\infty)$

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=36\end{array}\right., \lim\limits_{x->+\infty} f(t)=2$

Bài 7: Cho *a*, *b*, *c* là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{3}{b+c-a}+\dfrac{4}{a+c-b}+\dfrac{5}{a+b-c}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}, x>0, y>0.$

$S=\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a+c-b}+2\left(\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\dfrac{1}{a+c-b}+\dfrac{1}{a+b-c}\right)\Rightarrow S\ge\dfrac{2}{c}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{6}{a}.$

Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{b}=a$, nên $\dfrac{2}{c}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{6}{a}=2\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{a}\right)=2\left(a+\dfrac{3}{a}\right)\ge4\sqrt{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}.$

Bài 8: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2+c^2b^2+1\le3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{4b^2}{(1+2b)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}$.

Bài giải

Ta có: $P=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{4b^2}{(1+2b)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2b}+1\right)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}$

Đặt $d=\dfrac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2+c^2b^2+1\le3b$ trở thành $a^2+c^2+d^2\le3d$

Mặt khác $P=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{d}{2}+1\right)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}\ge\dfrac{8}{\left(a+\dfrac{d}{2}+2\right)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}\ge\dfrac{64}{\left(a+\dfrac{d}{2}+c+5\right)^2}=\dfrac{256}{(2a+d+2c+10)^2}$

Mà: $2a+4d+2c\le a^2+1+d^2+4+c^2+1=a^2+d^2+c^2+6\le3d+6$ Suy ra: $2a+d+2c\le6$

Do đó: $P\ge1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a=1, c=1, b=\dfrac{1}{2}$

Bài 9: Cho *a*, *b*, *c* là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{a+3c}{a+2b+c}+\dfrac{4b}{a+b+2c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}.$

Bài giải

Đặt $\begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = a + b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + 5y - 3z \\ b = x - 2y + z \\ c = -y + z \end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x}\right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y}\right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17;$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = \left(1+\sqrt{2}\right)a, c = \left(4+3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$.

Bài 10: Cho a,b,c là 3 cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{(b+c-a)^3}{3a} + \frac{(c+a-b)^3}{3b}$$

Bài giải

Áp dụng BPT CAUCHY ta có

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{c}{3} + \frac{1}{3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b-c)^3}{3c}.\frac{c}{3}.\frac{1}{3}} = a+b-c \Rightarrow \frac{(a+b-c)^3}{3c} \geq a+b-\frac{4c}{3}-\frac{1}{3}$$

Tương tự: $\dfrac{(b+c-a)^3}{3a} \geq b+c-\dfrac{4a}{3}-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{(c+a-b)^3}{3b} \geq c+a-\dfrac{4b}{3}-\dfrac{1}{3}$

Suy ra $P \geq \dfrac{2}{3}(a+b+c) - 1 = 1$

$P = 1$ khi $a = b = c = 1$

Vậy $\min P = 1$ khi $a = b = c = 1$

Bài 11: Cho a,b,c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}$$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Cô-si, với $x > 0$, ta có:

$$\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(1+x)\left(1-x+x^2\right)} \leq \frac{(1+x)+\left(1-x+x^2\right)}{2} = 1+\frac{x^2}{2}$$

Áp dụng kết quả trên với a>0, b>0 và c>o, ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \ge \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$; $\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(a+b)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 1 khi a=b=c.

Bài 12: Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 1.Tìm gía trị nhỏ nhất của biểu thức:

P= $\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\frac{3}{4}(a+b)^2$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức cosin, ta có $\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} \ge \frac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5}{4}(b+c)^2}=\frac{4a^2}{9(b+c)^2}$.

Tương tự, ta có $\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \frac{4b^2}{9(c+a)^2}$

Suy ra

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}\right) \ge \frac{2}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^2$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{ab+c(a+b)+c^2}\right)^2 \ge \frac{2}{9}\left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4}+c(a+b)+c^2}\right)^2=\frac{2}{9}\left(\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}\right)^2.$$

Vì a + b + c = 1 $\Leftrightarrow a+b=1-c$ nên

$$P \ge \frac{2}{9}\left(\frac{2(1-c)^2+4c(1-c)}{(1-c)^2+4c(1-c)+4c^2}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(c)=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$ với $c\in(0;1)$.

Ta có $f'(c)=\frac{16}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right).\frac{2}{(c+1)^2}-\frac{3}{2}(c-1)$; $f'(c)=0 \Leftrightarrow (c-1)(64-(3c+3)^3)=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$

Dựa vào bảng biên thiên ta có $f(c)\ge -\frac{1}{9}$ với mọi $c\in(0;1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \ge -\frac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 13: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab\ge 1; c(a+b+c)\ge 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{b+2c}{1+a}+\frac{a+2c}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$

Bài giải

$$P+2=\frac{a+b+2c+1}{1+a}+\frac{a+b+2c+1}{1+b}+6\ln(a+b+2c)=(a+b+2c+1)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)+6\ln(a+b+2c)$$

Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau:

$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (1); $\sqrt{ab}\le\frac{ab+1}{2}$ (2)

Thật vậy, +) $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow(2+a+b)(1+\sqrt{ab})\ge2(1+a)(1+b)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right)\ge0$ luôn đúng vì $ab\ge1$. Dấu “=” khi a = b hoặc ab = 1

$\sqrt{ab}\le\frac{ab+1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{ab}-1\right)^2\ge0$. Dấu “=” khi ab=1.

Do đó, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\ge\frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}}=\frac{4}{3+ab}\ge\frac{4}{ab+bc+ca+c^2}=\frac{4}{(a+c)(b+c)}\ge\frac{16}{(a+b+2c)^2}$.

Đặt $t=a+b+2c,t>0$ ta có $P+2\ge f(t)=\frac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t,t>0$

$$f'(t)=\frac{6}{t}-\frac{16(t+2)}{t^3}=\frac{6t^2-16t-32}{t^3}=\frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$$

Vậy, GTNN của P $3+6\ln4$ khi $a=b=c=1$

Bài 14: Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$.

Bài giải

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{ab}{1-ab}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}\le\frac{3}{2}$$

Ta có $\frac{ab}{1-ab}=\frac{2ab}{2a^2+2b^2+2c^2-2ab}\le\frac{2ab}{a^2+b^2+2c^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki $\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\ge\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\ge\frac{4ab}{a^2+b^2+2c^2}$.

Vậy $\frac{ab}{1-ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$.

Tương tự $\frac{bc}{1-bc}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right),\frac{ac}{1-ac}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+b^2}\right)$.

Cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

§4: BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN KHÔNG ĐỐI XỨNG

Bài 1: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Bài giải

Đặt $a = x - 2, b = y - 1, c = z \Rightarrow a, b, c > 0 \Rightarrow P = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \dfrac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2} + \dfrac{(c+1)^2}{2} \ge \dfrac{1}{4}(a+b+c+1)^2$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \le \dfrac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó $P \le \dfrac{1}{a+b+c+1} - \dfrac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

Đặt $t = a + b + c + 1 > 1$. Khi đó $P \le \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}, t > 1$

$f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}, t > 1;\ f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{81}{(t+2)^4} = \dfrac{81t^2 - (t+2)^4}{t^2(t+2)^4}$

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 81t^2 - (t+2)^4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 (\text{do } t>1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 0$

Bảng biến thiên

t	1		4		$+\infty$
f’(t)		+	0	-	
f(t)	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

Từ BBT Ta có $\max f(x) = f(4) = \dfrac{1}{8}$

Vậy $\max P = f(4) = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a + b + c + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow x = 3;\ y = 2;\ z = 1$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$.

Bài giải

Đặt $\begin{cases}x=a+2b+c\\ y=a+b+2c\\ z=a+b+3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+5y-3z\\ b=x-2y+z\\ c=-y+z\end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$P=\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}-\frac{-8y+8z}{z}=\left(\frac{4x}{y}+\frac{2y}{x}\right)+\left(\frac{8y}{z}+\frac{4z}{y}\right)-17$

$P\ge 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}}+2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}}-17=12\sqrt{2}-17;$

Đẳng thức xảy ra khi $b=\left(1+\sqrt{2}\right)a,c=\left(4+3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2}-17$.

Bài 3: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\frac{2}{3x+2y+z+1}+\frac{2}{3x+2z+y+1}=(x+y)(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2(x+3)^2+y^2+z^2-16}{2x^2+y^2+z^2}$.

Bài giải

Ta có: $(x+y)(x+z)\le\frac{(x+y+x+z)^2}{4}=\frac{(2x+y+z)^2}{4}$; $2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1}+\frac{1}{3x+2z+y+1}\right)\ge\frac{8}{3(2x+y+z)+2}$

Từ giả thiết suy ra: $\frac{8}{3(2x+y+z)+2}\le\frac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt $2x+y+z=t\ (t>0)\Rightarrow\frac{8}{3t+2}\le\frac{t^2}{4}\Leftrightarrow(t-2)(3t^2+8t+16)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2\Rightarrow 2x+y+z\ge 2$

Mà: $4\le(2x+y+z)^2\le(2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\frac{2}{3}$.

Ta có: $P=\frac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2}=1+\frac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2}\le 1+\frac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}}=1+\frac{36x+6}{3x^2+2}$

Xét hàm số: $f(x)=1+\frac{36x+6}{3x^2+2}$ với $x>0$. $f'(x)=\frac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \ (\text{loại})\\ x=\frac{2}{3}\ \ \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right)=10\end{array}\right.$

Suy ra: $f(x)\le 10\Rightarrow P\le 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu "=" xảy ra khi: $x=\frac{2}{3},y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng: $\frac{2a}{a+2}+\frac{3b}{b+3}+\frac{c}{c+1}\le\frac{6\left(a+b+c\right)}{a+b+c+6}$

Bài giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a+2}{4}-\frac{2a}{a+2}\right)+\left(\frac{b+3}{4}-\frac{3b}{b+3}\right)+\left(\frac{c+1}{4}-\frac{c}{c+1}\right)\ge\frac{a+b+c+6}{4}-\frac{6\left(a+b+c\right)}{a+b+c+6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(a-2\right)^2}{4\left(a+2\right)}+\frac{\left(b-3\right)^2}{4\left(b+3\right)}+\frac{\left(c-1\right)^2}{4\left(c+1\right)}\ge\frac{\left(a+b+c-6\right)^2}{4\left(a+b+c+6\right)}\Leftrightarrow\frac{\left(a-2\right)^2}{a+2}+\frac{\left(b-3\right)^2}{b+3}+\frac{\left(c-1\right)^2}{c+1}\ge\frac{\left(a+b+c-6\right)^2}{a+b+c+6}$$

Áp dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$VT\left(2\right)\ge\frac{\left[\left(a-2\right)+\left(b-3\right)+\left(c-1\right)\right]^2}{\left(a+2\right)+\left(b+3\right)+\left(c+1\right)}=\frac{\left(a+b+c-6\right)^2}{a+b+c+6}=VP\left(2\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2;b=3;c=1$.

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Bài 5: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+2b>c$ và $a^2+b^2+c^2-2=ab+bc+ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a+c+2}{a\left(b+c\right)+a+b+1}-\frac{a+b+1}{\left(a+c\right)\left(a+2b-c\right)}$

.

Bài giải

$$2+ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2\ge a^2+2bc\Rightarrow 2\left(ab+ac+1\right)\ge a^2+ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow 2\left(ab+ac+1\right)\ge\left(a+b\right)\left(a+c\right)\Rightarrow ab+ac+1\ge\frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}{2}\Rightarrow a\left(b+c\right)+a+b+1$$

$$\ge\frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}{2}+\left(a+b\right)\Rightarrow a\left(b+c\right)+a+b+1\ge\frac{\left(a+b\right)\left(a+c+2\right)}{2}\Rightarrow\frac{a+c+2}{a\left(b+c\right)+a+b+1}\le\frac{2}{a+b}$$

$$\left(a+c\right)\left(a+2b-c\right)\le\frac{1}{4}\left(a+c+a+2b-c\right)^2=\left(a+b\right)^2\Rightarrow\frac{a+b+1}{\left(a+c\right)\left(a+2b-c\right)}\ge\frac{a+b+1}{\left(a+b\right)^2}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{\left(a+b\right)^2}$$

Khi đó $P\le\frac{2}{a+b}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{\left(a+b\right)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{\left(a+b\right)^2};t=\frac{1}{a+b}>0$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t-t^2;t>0,f'\left(t\right)=1-2t,f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

$f(t)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ $-\infty$

Kết luận: $MaxP = \frac{1}{4}, khi\ a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, b = c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Bài 6 : Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $8(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a + b + c)^2$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a(1 - a^3) + b(1 - b^3) + c$.

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $5c^2 - 6(a+b)c + (a+b)^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(a+b) \le c \le a+b$.

Ta có $a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}(a+b)^4 \forall a,b$ => P $\le 2(a+b) - \frac{1}{8}(a+b)^4$

Xét $f(t) = 2t - \frac{t^4}{8}$ $(t \ge 0)$, $f'(t) = 2 - \frac{t^3}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{4}$

BBT:...

t	0	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
f'(t)	+	0	-
f(t)		$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$	

+) MaxP = $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \\ c = \sqrt[3]{4} \end{cases}$.

Bài 7 : Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 27$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^4 - b^4 - c^4 + ab\left(a^2 - b^2\right) + ac\left(a^2 - c^2\right) - bc\left(b^2 + c^2\right)$.

Bài giải

$P = a^4 - b^4 - c^4 + a^3b - ab^3 + a^3c - ac^3 - b^3c - bc^3 = a^3(a+b+c) - b^3(b+a+c) - c^3(c+a+b) = 3\left(a^3 - b^3 - c^3\right)$

$\left(a^3 - b^3 - c^3\right) = a^3 - (b+c)\left(b^2 + c^2 - bc\right)$

$b + c = 3 - a;\quad bc = \frac{1}{2}\left[(b+c)^2 - \left(b^2 + c^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[(3-a)^2 - \left(27 - a^2\right)\right] = a^2 - 3a - 9$

Do đó $a^3 - b^3 - c^3 = a^3 - (3-a)\left(27 - a^2 - a^2 + 3a + 9\right) = -a^3 + 9a^2 + 27a - 108$

Ta có $b + c = 3;\quad bc = a^2 - 3a - 9$

Ta luôn có $(b+c)^2 \ge 4bc, \forall b,c$. Do đó $(3-a)^2 \ge 4\left(a^2-3a-9\right) \Leftrightarrow a \in [-3;5]$

Ta có $P=-3a^3+27a^2+81a-324$

Xét hàm số $f(a)=-3a^3+27a^2+81a-324$ xác định và liên tục trên $[-3;5]$

$f'(a)=-9a^2+54a+81;$ $\quad f(-3)=-243$

$f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3+3\sqrt{2} \notin [-3;5]; \\ a=3-3\sqrt{2} \in [-3;5] \end{array}\right.$ $\quad f(5)=381$, $\quad f(3-3\sqrt{2})=81-324\sqrt{2}$

Vậy GTLN của $f(a)$ bằng 381 khi $a=5$

Do đó GTLN của P bằng 381 khi $a=5;\ b=c=-1$

Bài 8: Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 7abc. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{8a^4+1}{a^2}+\frac{108b^5+1}{b^2}+\frac{16c^6+1}{c^2}$.

Bài giải

Viết lại giả thiết về dạng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=7$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $A=8a^2+\frac{1}{2a^2} \ge 4, "=" \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$B=54b^3+54b^3+\frac{2}{9b^2}+\frac{2}{9b^2}+\frac{2}{9b^2} \ge 10, "=" \Leftrightarrow \mathrm{b}=\frac{1}{3};\ C=16c^4+\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{4c^2} \ge 3, "=" \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$

Từ đó, với $D=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{2c^2}$, theo bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacopsky- Schwarz, thì

$$P=A+B+C+D \ge 4+10+3+\frac{1}{2+3+2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=24, "=" \Leftrightarrow a=c=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}.$$

Bài 9: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4$.

Bài giải

Đặt t = b+c; y = c + a; $z=a+b \Rightarrow a=\frac{-x+y+z}{2}; b=\frac{x-y+z}{2};\ c=\frac{x+y-z}{2}$

Do a, b ,c> 0 nên x, y, z >0. Khi đó:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{a+b}+\frac{9c}{a+b}=\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{4(x-y+z)}{2y}+\frac{9(x+y-z)}{2z}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-2-\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{y}{2x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{9x}{2z}\right)+\left(\frac{2z}{y}+\frac{9y}{2z}\right) \ge -7+2+3+6=4.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ z=3x \\ 3y=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+a=2(b+c) \\ a+b=3(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ c=0 \end{cases}$ (loại)

Vậy đẳng thức không xảy ra, tdo đó ta có đpcm.

Bài 10: Cho ba số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3$

Bài giải

Có $x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y) \Rightarrow P=x^3+y^3-(x+y)^3=3xyz$

Từ $x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow (x+y)^2-2xy+z^2=2 \Rightarrow 2z^2-2xy=2 \Rightarrow xy=z^2-1$

Vậy $P=3z(z^2-1)$

Do $2=x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{2}(x+y)^2+z^2=\frac{3}{2}z^2 \Rightarrow -\sqrt{\frac{4}{3}} \le z \le \sqrt{\frac{4}{3}}$

Đặt $P=f(z)=3z^3-3z$ với $z \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right]=K$

Có $f'(z)=9z^2-3, f'(z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\frac{1}{\sqrt{3}} \in K \\ z=\frac{1}{\sqrt{3}} \in K \end{array}\right.$

Ta có: $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

Do vậy $\max P=\frac{2}{\sqrt{3}}$ khi $z=\frac{2}{\sqrt{3}}; x=y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 11: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $x>2, y>1, z>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}}-\frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Bài giải

Đặt $a=x-2, b=y-1, c=z$

Ta có $a,b,c>0$ và $P=\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Ta có $a^2+b^2+c^2+1 \ge \frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+1)^2}{2} \ge \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \le \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó: $P \le \frac{1}{a+b+c+1}-\frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Đặt $t=a+b+c+1 \Rightarrow t>1$. Khi đó $P \le \frac{1}{t}-\frac{27}{(t+2)^3}, t>1$

Xét hàm $f(t)=\frac{1}{t}-\frac{27}{(t+2)^3}, t>1;\ f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{81}{(t+2)^4};$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow (t+2)^4=81t^2 \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow t=4$ (do $t>1$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)=0$

Từ bảng biến thiên ta có

$\max f(t)=f(4)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow t=4$

$\max P=f(4)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=3; y=2; z=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$, đạt được khi $(x;y;z)=(3;2;1)$

Bài 12: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

Bài giải

Đặt $\begin{cases} x=a+2b+c \\ y=a+b+2c \\ z=a+b+3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+5y-3z \\ b=x-2y+z \\ c=-y+z \end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}-\frac{-8y+8z}{z}=\left(\frac{4x}{y}+\frac{2y}{x}\right)+\left(\frac{8y}{z}+\frac{4z}{y}\right)-17$$

$$P\ge 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}}+2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}}-17=12\sqrt{2}-17$$

Đẳng thức xảy ra khi $b=\left(1+\sqrt{2}\right)a, c=\left(4+3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2}-17$

Bài 13: Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+c=1$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{2a}{a^2+1}+\frac{2b}{b^2+1}+\frac{c^2-1}{c^2+1}\le\frac{3}{2}$

Bài giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=1$ta có $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=a(a+b)+c(b+a)=(a+b)(a+c)$.

Tương tự $b^2+1=(b+c)(b+a)$ và $c^2+1=(c+a)(c+b)$.

Từ đó suy ra: $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}=\frac{1+ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}$

$$=\frac{1+ab}{\sqrt{(1+ab)^2+(a-b)^2}}.\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}$$

Hay $\frac{2a}{a^2+1}+\frac{2b}{b^2+1}+\frac{c^2-1}{c^2+1}\le\frac{2}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c^2-1}{c^2+1}=1+\frac{2}{\sqrt{c^2+1}}-\frac{2}{c^2+1}$

Xét hàm số $f(t)=1+\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}$ trên $[1;+\infty)$ có $f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{4}{t^3}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[1;+\infty)} f(t)=f(2)=\frac{3}{2}$ hay $1+\frac{2}{\sqrt{c^2+1}}-\frac{2}{c^2+1}\le\frac{3}{2}$.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 14: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4$

Bài giải

Đặt $x=b+c;y=c+a;z=a+b\Rightarrow a=\frac{-x+y+z}{2};b=\frac{x-y+z}{2};c=\frac{x+y-z}{2}$

Do $a,b,c>0$ nên $x,y,z>0$. Khi đó:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}=\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{4(x-y+z)}{2y}+\frac{9(x+y-z)}{2z}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-2-\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{y}{2x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{9x}{2z}\right)+\left(\frac{2z}{y}+\frac{9y}{2z}\right)\ge-7+2+3+6=4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\z=3x\\3y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c+a=2(b+c)\\a+b=3(b+c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b\\c=0\end{cases}$ (loại)

Vậy đẳng thức không xảy ra, do đó ta có điều phải chứng minh

Bài 15 : Xét x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy+xz+1=x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(xy+xz+2)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$

Bài giải

Cách 1

Từgiả thiết ta có : $y+z+\frac{1}{x}=1\Rightarrow z<1\Rightarrow1-\frac{4}{3z}<0$ và : $1-z\ge2\sqrt{\frac{y}{x}}\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{y}}\ge\frac{2}{1-z}$

Lại có : $(xy+xz+2)(1+\frac{1}{y})=(x+1)(1+\frac{1}{y})\ge(1+\sqrt{\frac{x}{y}})^2\ge(1+\frac{2}{1-z})^2\Rightarrow P\le(1+\frac{2}{1-z})^2(1-\frac{4}{3z})$

Xét hàm số : $f(z)=(1+\frac{2}{1-z})^2(1-\frac{4}{3z})$ với $z\in(0;1)$

$$\Rightarrow f'(z)=(1+\frac{2}{1-z})\left(\frac{4}{(1-z)^2}(1-\frac{4}{3z})+\frac{4}{3z^2}(1+\frac{2}{1-z})\right)$$

$$\Rightarrow f'(z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2}\end{array}\right. \Rightarrow f(z)_{max}=f(\frac{1}{2})=\frac{-125}{3}$$

Vậy $P_{\min}=\frac{-125}{3} \Leftrightarrow (x;y;z)=(4;\frac{1}{4};\frac{1}{2})$

Cách 2

$xy+xz+1=x \Rightarrow y+z+\frac{1}{x}=1$. Đặt $a=x, b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Nên $a,b,c>1$

$$-3P=-(xy+yz+2)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(3-\frac{4}{z}\right)=(x+1)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{4}{z}-3\right)=(a+1)(b+1)(4c-3)$$

Ta có: $\frac{c-1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \sqrt{ab}\ge\frac{2c}{c-1}=2+\frac{2}{c-1}$. Lại đặt: $t=c-1>0$. Ta có:

$$(a+1)(b+1)(4c-3)\ge(4c-3)\left(1+\sqrt{ab}\right)^2\ge(4c-3)\left(3+\frac{2}{c-1}\right)^2=(4t+1)\left(3+\frac{2}{t}\right)^2=f(t)$$

$$f'(t)=4\left(3+\frac{2}{t}\right)\frac{t(3t+2)-4t-1}{t^2}=4\left(3+\frac{2}{t}\right)\frac{(t-1)(3t+1)}{t^2}$$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$ (do: t > 1) bằng bảng biến thiên suy ra: $f(t)\ge f(1)=125$

$-3P\ge125 \Rightarrow P\le\frac{-125}{3}$. $Max=\frac{-125}{3}$ khi $(a,b,c)=(4,4,2)\Leftrightarrow(x,y,z)=\left(4;\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

Cách 3

Ta có: $xy+xz+1=x \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{xz}{y}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y}\ge\frac{xz}{y}+2\sqrt{x.\frac{1}{y}}=z.\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}}$. Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{y}}>0$

$\Rightarrow t^2\ge z.t^2+2t \Rightarrow t(1-z)\ge2(*)\Rightarrow 1-z>0 \Rightarrow 0<z<1$

Khi đó: $P=-(xy+xz+2)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{4}{3z}-1\right)=-\frac{(x+1)(y+1)}{y}.\frac{1+3(1-z)}{3z}=-\left(x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+1\right).\frac{1+3(1-z)}{3z}$

$$\le-\left(\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}}+1\right)\frac{1+3(1-z)}{3z}=-(t^2+2t+1)\frac{1+3(1-z)}{3z}$$

Theo (*) ta có: $t\ge\frac{2}{1-z}\Rightarrow t^2\ge\frac{4}{(1-z)^2}\Rightarrow P\le-\left(\frac{4}{(1-z)^2}+\frac{4}{1-z}+1\right).\frac{1+3(1-z)}{3z}$

$\left(\frac{4}{(1-z)^2}+\frac{4}{1-z}+1\right)\left(\frac{1+3(1-z)}{3(1-z)-3}\right)=\left(\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t}+1\right).\frac{1+3t}{3t-3}=f(t)$. Với $t=1-z\Rightarrow 0<t<1$

Xét sự biến thiên của hàm số dễ dàng suy ra được hàm số đã cho có GTLN là $-\frac{125}{3}$ khi $t=\frac{1}{2}$.

Vậy $\max P=-\frac{125}{3}$ khi $(x;y;z)=\left(4;\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

Bài 16 : Cho các số thực dương x, y, z thuộc thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{16}{x+y+z}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$

Bài giải

Cách 1

Ta có: $x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{16x}{x+y+z}\Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=\frac{16}{1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}}$

$\Leftrightarrow 16=\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1$

$=3+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\ge 3+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+2.\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{z}{y}}+2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}}=3+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+2\sqrt{\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{x}{z}}$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{z}}>0$. Khi đó ta có: $16\ge 3+\frac{1}{t^2}+t^2+\frac{2}{t}+2t\Leftrightarrow t^4+2t^3-13t^2+2t+1\le 0$

$\Leftrightarrow t^2\left(t+\frac{1}{t}-3\right)\left(t+\frac{1}{t}+5\right)\le 0\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}\le 3\Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le t\le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ta có $P=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}=\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)=\left(1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)$

$=\left(1+\frac{z}{x}-\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)\le\left(1+\frac{z}{x}-2\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{y}{x}}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)=\left(1+\frac{z}{x}-2\sqrt{\frac{z}{x}}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)=\left(1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}\right)\left(1-t^2\right)$

$=2\left(t-\frac{1}{t}\right)-\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)=f(t)$

Xét $f'(t)=2+\frac{2}{t^2}-2t-\frac{2}{t^3}=\frac{-2(t-1)^2\left(t^2+t+1\right)}{t^3}=0\Leftrightarrow t=1$

Ta có bảng biến thiên:

t		1	
f'(t)	–	0	–
f(t)	$\searrow$	0	$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $Max\ P=Max\ f(t)=f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{4}{7-3\sqrt{5}}-\frac{8}{3-\sqrt{5}}-1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{z}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y^2=xz \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{16}{x+y+z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{2}{7-3\sqrt{5}}.x \\ y=\sqrt{\dfrac{2}{7-3\sqrt{5}}}.x \end{cases}$

Cách 2

Giả sử b nằm giữa a và c. Đặt: $A=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a};B=\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\to A+B=13$. Ta có:

$\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)+\left(\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}\right)=\left(A^2-2B\right)+\left(B^2-2A\right)=\left(A+B\right)^2-2\left(A+B\right)-2AB=143-2AB$ và

$$16=\left(a+b+c\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\sqrt{\left[a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\right]\left[\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)\right]}$$

$$\geq\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)}+2\sqrt{\left(ab+bc+ca\right)\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)}+8\Rightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\leq 64$$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)+\left(\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}\right)\leq 61\Leftrightarrow AB\geq 41$. Ta có:

$$P^2=\left[\dfrac{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}{abc}\right]^2=\left(A-B\right)^2=\left(A+B\right)^2-4AB\leq 13^2-4.41=5\Rightarrow P\leq\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=2\left(ab+bc+ca\right) \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=2abc\left(a+b+c\right) \\ \left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \sqrt{bc}=\sqrt{a}\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\dfrac{a\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4} \\ c=a+b \end{cases}$$

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\left(a+b+c\right)=16$. Suy ra dấu "=".

Cách 3

$$GT\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}=13$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\dfrac{x}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}\right)+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\leq 13$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x}{z}}=t\left(t>0\right)\Rightarrow\left(t^2+5t+1\right)\left(t^2-5t+1\right)<0\Rightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq t\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Xét $\left|P\right|=\left|\dfrac{\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)}{xyz}\right|$

$$G/S\ \ x\ge y\Rightarrow |P|=\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{y}{z}-1\right)\left(1-\frac{z}{x}\right)=\left[\frac{x}{z}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)+1\right]\left(1-\frac{z}{x}\right)\le\left(\frac{x}{z}-2\sqrt{\frac{x}{z}}+1\right)\left(1-\frac{z}{x}\right)$$

$$=(t-1)^2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=f(t)$$

$$f(t)\le f\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt5\Rightarrow f_{\max}=\sqrt5\Leftrightarrow x:y:z=\frac{\left(3+\sqrt5\right)^2}{4}:1:\frac{\left(3+\sqrt5\right)}{2}$$

Cách 4

Giả sử $a=\max\{a,b,c\}$, rõ ràng ta chỉ cần xét điều kiện $a\ge c\ge b$

Đặt $\frac{a}{c}=x,\frac{c}{b}=y$. Từ giả thiết ra suy ra

$$13=xy+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+x+y+\frac{1}{xy}\ge xy+\frac{1}{xy}+2\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2+2\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)\le15\Leftrightarrow1\le\sqrt{xy}\le\frac{3+\sqrt5}{2}$$

Ta có: $P=(1-x)(1-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)\le\left(1-\sqrt{xy}\right)^2\left(1-\frac{1}{xy}\right)$

Đặt $\sqrt{xy}=t\in\left[1;\frac{3+\sqrt5}{2}\right]$, ta có:

$$P=f(t)=t^2-2t+\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2};\ f'(t)=\frac{2(t-1)^2\left(t^2+t+1\right)}{t^3}\ge0$$

Vậy $P\le f\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt5$. Đẳng thức đạt được khi $a:b:c=\frac{\left(3+\sqrt5\right)^2}{4}:1:\frac{3+\sqrt5}{2}$

Cách 5:

Từ giả thiết, ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=13$

$$\frac{x^2+yz}{xy}+\frac{x^2+yz}{xz}+\frac{y^2+z^2}{yz}=13\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+yz\right)(y+z)}{xyz}=13-\frac{y^2+z^2}{yz}$$

Mà $P=\frac{x^2+yz-x(y+z)}{xyz}(z-y)=\left(\frac{x^2+yz}{xyz}-\frac{y+z}{yz}\right).(z-y)$

$$=\left[\frac{13}{y+z}-\frac{y^2+z^2}{yz(y+z)}-\frac{y+z}{yz}\right].(z-y)=\frac{13\left(1-\frac{y}{z}\right)}{\frac{y}{z}+1}+\frac{\left(\frac{y}{z}-1\right)\left[\left(\frac{y}{z}\right)^2+1\right]}{\frac{y}{z}\left(\frac{y}{z}+1\right)}+\frac{\left(\frac{y}{z}\right)^2-1}{\frac{y}{z}}\ldots$$

Bài 17: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a.b.c = 1 và $1\le c\le4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}$

Bài giải

Áp dụng (*) ta có $Q=\frac{2}{1+ab}+\frac{1}{1+c^2}=\frac{2c}{c+1}+\frac{1}{1+c^2}$

Xét hàm $f(c)=\frac{2c}{c+1}+\frac{1}{1+c^2}$ trên [1;4]

Ta có $f'(c)=\frac{2c}{(c+1)^2}-\frac{2c}{(c^2+1)^2}=2.\frac{c^4-c^3-c+1}{(c+1)^2(c^2+1)^2}=2.\frac{(c-1)^2(c^2+c+1)}{(c+1)^2(c^2+1)^2}>0$ trên [1;4]

$\Rightarrow$ f(c) đồng biến trên [1;4]; $f(c)=f(4)=\frac{8}{5}+\frac{1}{17}=\frac{141}{85}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} c=4 \\ abc=1 \\ \left[\begin{array}{l} a=b \\ ab=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b=-\frac{1}{2} \\ c=4 \end{cases} \end{array}\right.$

Bài 18 : Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=3c^2+4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(b+c)^2(a-c)}{a+c}+\frac{(a+c)^2(b-c)}{b+c}-c^3$$

Bài giải

Đặt x = a + c, y = b + c, x,y > 0 ta có:

$$P=\frac{x^2(x-2c)}{x}+\frac{y^2(y-2c)}{y}-c^3=x^2+y^2-2c\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)-c^3 \quad (0.5)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geq x+y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y $\Leftrightarrow$ a = b, nên : $P\leq x^2+y^2-2c(x+y)-c^3$ (0.5)

Nhưng $x^2+y^2-2c(x+y)=a^2+b^2-2c^2=(a^2+b^2-3c^2)+c^2=4+c^2$

nên $P\geq -c^3+4+c^2$ (0.5)

Xét hàm số $U=f(t)=-t^3+t^2+4, t\in(0;+\infty); f'(t)=-3t^2+2t; f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Từ đó ta có: $P\leq\frac{112}{27}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $c=\frac{2}{3}$

Bài 19: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ 2(a^2+1)\geq b^2+c^2+4bc \end{cases}$ $CMR: \frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{a^2+c^2+1}\leq\frac{8}{4a^2+(b+c)^2+4}$

Bài giải

$BDT \Leftrightarrow \left[4(a^2+1)+(b+c)^2\right]\left[2(a^2+1)+(b+c)^2-2bc\right] \le 8\left[(a^2+1)^2+(a^2+1)(b^2+c^2)+b^2c^2\right]$

$\Leftrightarrow \left[4(a^2+1)+(b+c)^2\right]\left[2(a^2+1)+(b+c)^2-2bc\right] \le 8\left[(a^2+1)^2+(a^2+1)(b^2+c^2)-2bc(a^2+1)+b^2c^2\right]$

Đặt $\begin{cases} x=a^2+1 \\ y=(b+c)^2 \Rightarrow 2x \ge y+2z \Leftrightarrow 2x-y \ge 2z > 0 \\ z=bc \end{cases}$

$BDT \Leftrightarrow [4x+y][2x+y-2z] \le 8\left[x^2+xy-2xz+z^2\right] \Leftrightarrow 8x^2+6xy-8zx+y^2-2yz \le 8x^2+8xy-16xz+8z^2$

$\Leftrightarrow 2xy-8zx-y^2+2yz+8z^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(xy-4xz-3yz+12z^2\right)+8yz-16z^2-y^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x-3z)(y-4z)-(y-4z)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (y-4z)(2x+z-y) \ge 0$

$\Leftrightarrow y \ge 4z \Leftrightarrow (b+c)^2 \ge 4bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ b=c

<u>Bài 20:</u> Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-\min\{a,b,c\}$

<u>Bài giải</u>

Giả sử $c=\min(a,b,c)$

Khi đó $P=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-c=a+b+2\sqrt{ab}+2\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Lại có $(a+1)(b+1)(c+1)=5 \Rightarrow a+b+ab+1=\dfrac{5}{c+1}$

Mặt khác $5 \ge (c+1)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{\dfrac{5}{c+1}}$

Từ đó $\Rightarrow P \le a+b+ab+1+2\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \le \dfrac{5}{c+1}+2\sqrt{\dfrac{5c}{c+1}}$

Xét hàm số $f(c)=\dfrac{5}{c+1}+2\sqrt{\dfrac{5c}{c+1}} \Rightarrow f(c)_{max}=f(\frac{1}{4})=6$

Vậy $P_{max}=6$ tại $(a,b,c)=(1,1,\frac{1}{4})$ và các hoán vị .

<u>Bài 21:</u> Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{a}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+c}}-\dfrac{9\sqrt{(a+c)(b+c)}}{8c}$

<u>Bài giải</u>

Ta có : $\sqrt{\dfrac{a}{a+c}}=2\sqrt{\dfrac{a}{a+c}.\dfrac{1}{2}} \le \dfrac{a}{a+c}+\dfrac{1}{4} \Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{a+c}+\dfrac{b}{b+c}-\dfrac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}$

Mặt khác : $\dfrac{a}{a+c}+\dfrac{b}{b+c}=2-c(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}) \le 2-\dfrac{2c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}=2-\dfrac{2c}{\sqrt{c^2+1}}$

$\Rightarrow P \le \frac{1}{2} + 2 - (\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}) \le \frac{1}{2} + 2 - 3 = \frac{-1}{2}$

Vậy $P_{max} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow (a;b;c) = (\frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{7}})$

Câu 22: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+2b>c$ và $a^2+b^2+c^2-2=ab+bc+ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1} - \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}$

Bài giải

Ta có : $2+ab+bc+ca = a^2+b^2+c^2 \ge a^2+2bc \Rightarrow 2(ab+ac+1) \ge a^2+ab+bc+ca$

$\Rightarrow 2(ab+ac+1) \ge (a+b)(a+c) \Rightarrow ab+ac+1 \ge \frac{(a+b)(a+c)}{2}$

$\Rightarrow a(b+c)+a+b+1 \ge \frac{(a+b)(a+c)}{2} + (a+b)$

$\Rightarrow a(b+c)+a+b+1 \ge \frac{(a+b)(a+c+2)}{2} \Rightarrow \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1} \le \frac{2}{a+b}$

Lại có : $(a+c)(a+2b-c) \le \frac{1}{4}(a+c+a+2b-c)^2 = (a+b)^2$

$\Rightarrow \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)} \ge \frac{a+b+1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{(a+b)^2} \Rightarrow P \le \frac{2}{a+b} - \frac{1}{(a+b)} - \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{(a+b)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{a+b} (t>0)$ Xét hàm $f(t) = t - t^2 \, (t>0) \Rightarrow f'(t) = 1-2t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Vậy Max P = $\frac{1}{4}$ khi t= $\frac{1}{2} \leftrightarrow a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$; b=c= $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Câu 23: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2+c^2b^2+1 \le 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$

Bài giải

Ta có $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b}+1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$

Đặt $d = \frac{1}{b}$ mà $a^2b^2+c^2b^2+1 \le 3b \Rightarrow a^2+c^2+d^2 \le 3\text{d}$

Lại có $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \ge \frac{8}{\left(a+\frac{d}{2}+2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \ge \frac{64}{\left(a+\frac{d}{2}+c+5\right)^2} = \frac{256}{(2a+d+2c+10)^2}$

Do $2a+4d+2c \le a^2+1+d^2+4+c^2+1 = a^2+c^2+d^2+6 \le 3d+6 \Rightarrow 2a+d+2c \le 6 \Rightarrow P \ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1; c=1; b=\frac{1}{2}$

Bài 24: cho các số thực dương a,b,c và $c=a^2+ab+b^2$ tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}-\frac{3(ab+2)\sqrt{2c^2+36}}{4ab(2c+3)^2}$$

Bài giải

Bài này khá hack não thì phải. Trước tiên lưu ý

$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}-\frac{1}{2}=\frac{4-a^2b^2}{(a^2+2)(b^2+2)}=\frac{(2-ab)(2+ab)}{2(a^2+2)(b^2+2)}$ ta sẽ chứng minh :

$\frac{(2-ab)(2+ab)}{2(a^2+2)(b^2+2)}-\frac{3(ab+2)\sqrt{2c^2+36}}{4ab(2c+3)^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2ab(2-ab)}{(a^2+2)(b^2+2)} \le \frac{3\sqrt{2c^2+36}}{(2c+3)^2}$ chú ý là:

$(a^2+2)(b^2+2)=a^2b^2+4+2(a^2+b^2) \ge 2(a^2+ab+b^2)+3=2c+3$

Ngoài ra $ab(2-ab)=1-(ab-1)^2 \le 1$ nên ta chỉ cần chứng minh

$\frac{2}{2c+3} \le \frac{3\sqrt{2(c^2+18)}}{(2c+3)^2} \Leftrightarrow (c-12)^2 \ge 0$:đúng từ đó $P \le \frac{1}{2}$ dấu bằng xẩy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ a^2+ab+b^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b)=\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2};\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{13}-3}{2};\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right)$ vậy max $P=\frac{1}{2}$

Bài 25: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=26$ tìm giá trị lớn nhất của :

$$P=\frac{2(x+y)}{8x^2+y^2+2x+29}-\frac{3}{(x+z+1)^2}+10\sqrt{(x+z)(y+2)}-xz-2y$$

Bài giải

(*)Ta có $2(xz+2y)+30=2xz+4y+x^2+y^2+z^2+4=(x+z)^2+(y+2)^2 \ge 2(x+z)(y+2)$

$\Rightarrow xz+2y \ge (x+z)(y+2)-15$. mặt khác $(x+z)(y+2)+25 \ge 10\sqrt{(x+z)(y+2)}$

Từ đó $10\sqrt{(x+z)(y+2)}-xz-2y \le 10\sqrt{(x+z)(y+2)}-(x+z)(y+2)+15 \le 40$

(*)Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\frac{2(x+y)}{8x^2+y^2+2x+29} \le \frac{1}{x+z+1} \Leftrightarrow 2(x+y)(z+x+1) \le 8x^2+y^2+2x+29$

$\Leftrightarrow 2(x^2+xy+yz+zx)+2(x+y) \le 8x^2+y^2+2x+(x^2+y^2+z^2)+3$

$\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)+2y \le 7x^2+2y^2+z^2+3$.áp dụng BĐT am-gm :

$2z(x+y) \le z^2+(x+y)^2 \Rightarrow 2(xy+yz+zx) \le z^2+x^2+4xy+y^2$ ta chỉ cần có:

$z^2+x^2+4xy+y^2+2y \le 7x^2+2y^2+z^2+3 \Leftrightarrow 6x^2+y^2-4xy-2y+2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+(y-x-2)^2 \ge 0$:đúng. Từ đây suy ra :

$$\frac{2(x+y)}{8x^2+y^2+2x+29}-\frac{3}{(z+x+1)^2} \le \frac{1}{z+x+1}-\frac{3}{(z+x+1)^2}=\frac{1}{12}-3\left(\frac{1}{z+x+1}-\frac{1}{6}\right)^2 \le \frac{1}{12}$$

Từ các đánh giá trên ta có: $P\le\frac{1}{12}+40$ dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,3,4)$ .vậy max $P=\frac{1}{12}+40$

Bài 26: Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c\le 6$ tìm giá trị lớn nhất của :
$P=\frac{abc(5ab+8ca+9bc)}{(4a+3b)(5b+4c)(3c+5a)}$

Bài giải

Trước hết ta viết lại P dưới dạng : $P=\frac{abc(5ab+8ca+9bc)}{(4a+3b)(5b+4c)(3c+5a)}=\frac{\frac{5}{c}+\frac{8}{b}+\frac{9}{a}}{\left(\frac{4}{b}+\frac{3}{a}\right)\left(\frac{5}{c}+\frac{4}{b}\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{5}{c}\right)}$

Đặt $x=\frac{3}{a};y=\frac{4}{b}$ và $z=\frac{5}{c}$ giả thiết <=> $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}\le 6$ và cần tìm max $P=\frac{3x+2y+z}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Ta có $36\ge\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}\right)^2=\frac{9}{x^2}+\frac{16}{y^2}+\frac{25}{z^2}+\frac{24}{xy}+\frac{30}{xz}+\frac{40}{yz}$ áp dụng bđt am-gm:

$9\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge\frac{18}{zx}$ và $16\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}\right)\ge\frac{32}{yz}$ nên $\frac{9}{x^2}+\frac{16}{y^2}+\frac{25}{z^2}\ge\frac{18}{zx}+\frac{32}{yz}$ từ đó

$36\ge\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}\right)^2\ge\frac{24}{xy}+\frac{48}{xz}+\frac{72}{yz}=\frac{24(3x+2y+z)}{xyz}\Rightarrow\frac{3x+2y+z}{xyz}\le\frac{3}{2}$ mặt khác

$P=\frac{3x+2y+z}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\frac{3x+2y+z}{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}}=\frac{3x+2y+z}{8xyz}\le\frac{3}{16}$

Dấu= xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=6\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2\Leftrightarrow(a,b,c)=\left(\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}\right)$ vậy max P=$\frac{3}{16}$

Bài 27: Cho ba số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=2\end{cases}$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$P=x^3+y^3+z^3$.

Bài giải

Có $x+y+z=0\Rightarrow z=-(x+y)\ \Rightarrow P=x^3+y^3-(x+y)^3=3xyz$

Từ $x^2+y^2+z^2=2\Rightarrow(x+y)^2-2xy+z^2=2\Rightarrow 2z^2-2xy=2\Rightarrow xy=z^2-1$

Vậy $P=3z(z^2-1)$

Do $2=x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2+z^2=\frac{3}{2}z^2\Rightarrow-\sqrt{\frac{4}{3}}\le z\le\sqrt{\frac{4}{3}}$

Đặt $P=f(z)=3z^3-3z$ với $z\in\left[-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right]=K$

Có $f'(z)=9z^2-3,\ f'(z)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in K \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in K \end{array}\right.$

Ta có: $f\left(-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)=-\sqrt{\dfrac{4}{3}}, f\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)=\sqrt{\dfrac{4}{3}}, f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Do vậy $\max P=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ khi $z=\dfrac{2}{\sqrt{3}}; x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 28: Cho a, b, c thuộc đoạn $[1,2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{4b+4c}+\frac{(b+c)^2+2bc}{c^2+4bc}$$

Bài giải

Ta có: $P=\dfrac{a}{4b+4c}+\dfrac{b^2}{c^2+4bc}+1=\dfrac{a^2}{4ab+4ac}+\dfrac{b^2}{c^2+4bc}+1$

$\Rightarrow P\geq \dfrac{(a+b)^2}{c^2+4ab+4c(a+b)}+1\geq \dfrac{(a+b)^2}{c^2+(a+b)^2+4c(a+b)}+1=\dfrac{t^2}{t^2+4t+1}, t=\dfrac{a+b}{2}\in[1;4]$

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2}{t^2+4t+1}$. Khi đó $f'(t)=\dfrac{2t+4t^2}{(t^2+4t+1)^2}>0$

$P\geq f(1)=\dfrac{1}{6}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\dfrac{c}{2}$.

Bài 29: Cho x,y,z là các số thực dương $x+y+z^2=xy+5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x}{x^2+y^2+18}+\dfrac{y}{x+y+4z}-\dfrac{4(x+y)}{25z}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x^2+y^2\geq 2xy=2(x+y+z^2-5)\Leftrightarrow x^2+y^2+10\geq 2(x+y+z^2)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+18\geq 2(x+y)+2(z^2+4)\geq 2(x+y)+8z=2(x+y+4z)$

Từ đó suy ra $\dfrac{2x}{x^2+y^2+18}\leq \dfrac{2x}{2(x+y+4z)}=\dfrac{x}{x+y+4z}$

Khi đó $P\leq \dfrac{x}{x+y+4z}+\dfrac{y}{x+y+4z}-\dfrac{4(x+y)}{25z}$

$$=\frac{x+y}{x+y+4z}-\frac{4(x+y)}{25z}=\frac{\frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z}+4}-\frac{4(x+y)}{25z}=f(t)=\frac{t}{t+4}-\frac{4t}{25}$$

Với $t=\dfrac{x+y}{z}>0$ xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t+4}-\dfrac{4t}{25}$, có

$f'(t)=\dfrac{4}{(t+4)^2}-\dfrac{4}{25}; f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ (t+4)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$

Do đó suy ra $f(t)\le f(1)=\dfrac{1}{25} \Rightarrow P_{\max}=\dfrac{1}{25}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=z; x=y \\ x+y+z^2=xy+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=2 \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{1}{25}$.

§5: BẤT ĐẲNG THỨC DỒN VỀ TỔNG A+B+C

Bài 1: Cho các số thực dương *a, b, c*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P=\dfrac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\dfrac{3}{\sqrt{a+b+c}}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số, ba số ta được:

$$\frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}=\frac{2}{a+\sqrt{\frac{a}{2}}.\sqrt{2b}+\sqrt[3]{\frac{a}{4}}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{4c}}\ge\frac{2}{a+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+2b\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{4}+b+c\right)}$$

$$=\frac{3}{2(a+b+c)}\Rightarrow P\ge\frac{3}{2(a+b+c)}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Đặt $t=\dfrac{1}{\sqrt{a+b+c}}>0$ thì $P\ge f(t)$, với $f(t)=\dfrac{3t^2}{2}-3t$.

Ta có $f(t)=\dfrac{3}{2}(t-1)^2-\dfrac{3}{2}\ge-\dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=1\Rightarrow P\ge-\dfrac{3}{2}$.

Min P= $-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{2}=2b\\ b=4c\\ a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{16}{21}\\ b=\dfrac{4}{21}\\ c=\dfrac{1}{21}\end{cases}$

Bài 2: Cho các số thực dương a, b, c thỏa: $4\left(a^3+b^3\right)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)}+\dfrac{b+c}{a+b+c+2}-\dfrac{(a+b)^2+c^2}{16}$

Bài giải

Áp dụng BĐT: $x^3+y^3\ge\frac{1}{4}(x+y)^3; xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \forall x,y>0$, kết hợp với giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3\le(a+b)^3+c^3\le4\left(a^3+b^3\right)+c^3=2(a+b+c)\left(c(a+b)-2\right)$$

$$\le2(a+b+c)\left(\frac{(a+b+c)^2}{4}-2\right)\Rightarrow a+b+c\ge4$$

dấu "=" xảy ra khi a+b=c>0

Khi đó sử dụng BĐT AM–GM ta có:

$$\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a\left(c+2\right)}=\frac{a}{a+c+2+\left(\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{a}{2}\right)}$$

$\le \dfrac{a}{a+c+2+2\sqrt{\dfrac{b^2}{2a}.\dfrac{a}{2}}}=\dfrac{a}{a+b+c+2}$ dấu "=" xảy ra khi a=b>0

Và $\left(a+b\right)^2+c^2\ge \frac{1}{2}\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow P\le \dfrac{a+b+c}{a+b+c+2}-\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{32}$

Đặt $t=a+b+c\ge 4\Rightarrow P\le f\left(t\right)=\dfrac{t}{t+2}-\dfrac{t^2}{32}$

$$f'\left(t\right)=\frac{2}{\left(t+2\right)^2}-\frac{t}{16}=\frac{32-t\left(t+2\right)^2}{16\left(t+2\right)^2}<0,\ \forall t\ge 4$$

$\Rightarrow$ hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left[4;+\infty\right)$.

Do đó $P\le f\left(t\right)\le f\left(4\right)=\dfrac{1}{6}$. Vậy GTLN của P bằng $\dfrac{1}{6}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b, a+b=c \\ a+b+c=4 \end{cases}\Leftrightarrow a=b=1,\ c=2$

Bài 3 : Cho a, b, c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}$$

Bài giải

$$a^2+b^2+c^2+1\ge \frac{\left(a+b\right)^2}{2}+\frac{\left(c+1\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(a+b\right)^2+\left(c+1\right)^2\right]\ge \frac{1}{4}\left(a+b+c+1\right)^2$$

$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\le \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3=\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$$

Vậy $P\le \dfrac{2}{a+b+c+1}-\dfrac{54}{\left(a+b+c+3\right)^3}$

$=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{\left(t+2\right)^3}=f\left(t\right)$ với $t=a+b+c+1$ $\quad (t>1)$

$f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{162}{\left(t+2\right)^4};\ \ f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=1(loai) \end{array}\right.$

t	1		4		$+\infty$
f'(t		+	0	−	
f(t)	0	$\nearrow$	1/4	$\searrow$	0

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 4 : Cho các số thực dương *a, b, c*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le a+\frac{1}{2}.\frac{a+4b}{2}+\frac{1}{4}.\frac{a+4b+16c}{3}=\frac{4}{3}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$.

Suy ra $P\ge\frac{3}{2(a+b+c)}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$

Đặt $t=a+b+c,\ t>0$. Khi đó ta có: $P\ge\frac{3}{2t}-\frac{3}{\sqrt{t}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{3}{2t}-\frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t>0$ ta có $f'(t)=\frac{3}{2t\sqrt{t}}-\frac{3}{2t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2t\sqrt{t}}-\frac{3}{2t^2}=0\Leftrightarrow t=1$

Do đó ta có $\min_{t>0} f(t)=-\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $t=1$

Vậy ta có $P\ge-\frac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{16}{21},b=\frac{4}{21},c=\frac{1}{21}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $(a,b,c)=\left(\frac{16}{21},\frac{4}{21},\frac{1}{21}\right)$.

Bài 5 : Cho các số thực dương *a, b, c*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{3a^4+3b^4+25c^3+2}{(a+b+c)^3}$

Bài giải

Áp dụng BĐT Cô - Si ta có: $2a^4+(a^4+1)\ge 2a^4+2a^2\ge 4a^3$ hay $3a^4+1\ge 4a^3$.

Tương tự $3b^4+1\geq 4b^3 \Rightarrow M\geq \dfrac{4a^3+4b^3+25c^3}{(a+b+c)^3}$

Mà $(a-b)^2(a+b)\geq 0 \Rightarrow 4(a^3+b^3)\geq (a+b)^3$

$$\Rightarrow M\geq \frac{(a+b)^3+25c^3}{(a+b+c)^3}=\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^3+25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3=\left(1-\frac{c}{a+b+c}\right)^3+25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$$

Đặt $t=\dfrac{c}{a+b+c}$ $(0<t<1)$

Xét hàm số $f(t)=(1-t)^3+25t^3$ $(0<t<1)$ có: $f'(t)=-3\left[(1-t)^2-(5t)^2\right]$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{6} \\ t=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Vậy $Min\, f(t)=f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{25}{36}$ khi $t=\dfrac{1}{6}$ hay $Min\ M=\dfrac{25}{36}$ $a=b=1, c=\dfrac{2}{5}$.

Bài 6 : Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+48\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\right)$

Bài giải

Ta có: $a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab \Leftrightarrow (a+b)^2+c^2=5(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(a+b)^2+c^2\geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)^2\leq 5(a+b+c)\Rightarrow 0<a+b+c\leq 10$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{a+10}{3}}};\sqrt{\frac{a+10}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+10}{3}.4}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{a+10}{3}+4\right)=\frac{a+22}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}\geq \frac{12}{a+22}$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{(b+c).8.8}\leq \frac{1}{4}.\frac{b+c+8+8}{3}=\frac{b+c+16}{12}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\geq \frac{12}{b+c+16}$$

$$\Rightarrow P\geq a=b+c+48.12\left(\frac{1}{a+22}+\frac{1}{b+c+16}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\frac{1}{a+22}+\frac{1}{b+c+16}\ge\frac{4}{a+b+c+38}\Rightarrow P\ge a+b+c+\frac{2304}{a+b+c+38}$$

Đặt $t=a+b+c\Rightarrow t\in(0;10]\Rightarrow P\ge t+\frac{2304}{t+38}$. Xét hàm $f(t)=t+\frac{2304}{t+38}$ trên $(0;10]$

Ta có $f'(t)=1-\frac{2304}{(t+38)^2}=\frac{(t-10).(t+86)}{(t+38)^2}\Rightarrow f'(t)\le 0\forall t\in(0;10]$

$\Rightarrow$*f(t)* nghịch biến trên (0;10] $\Rightarrow f(t)\ge f(10),\forall t\in(0;10];\ f(10)=58\Rightarrow P\ge 58$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b+c=10\\ a+b=c\\ \frac{a+10}{3}=4\\ b+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\\ c=5\end{cases}$

Vậy Min P =58, đạt được khi $\begin{cases}a=2\\ b=3\\ c=5\end{cases}$

Bài 7: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+a+4}+\sqrt{b^2+b+4}+\sqrt{c^2+c+4}$

Bài giải

Ta chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{x^2+x+4}\le\frac{2x+6}{3}\forall x\in[0;3]$

Bình phương rồi biến đổi tương đương ta được $5x(x-3)\le 0$ đúng $\forall x\in[0;3]$

Lần lượt cho $x=a;b;c$ rồi cộng các vế của bất đẳng thức ta được

$$P\le\frac{2(a+b+c)+18}{3}=8$$

Bài 8 : Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn: $5a+5b+5c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{2a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2b+3c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2c+3a}}$

Bài giải

Ta có: $\sqrt[3]{2a+3b}=\sqrt[3]{(2a+3b)1.1}\overset{Cauchy}{\le}\frac{2a+3b+1+1}{3}=\frac{2a+3b+2}{3}$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{2a+3b}}\ge\frac{3}{2a+3b+2}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2a+3b=1$

Tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt[3]{2b+3c}}\ge\frac{3}{2b+3c+2}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2b+3c=1$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2c+3a}}\ge\frac{3}{2c+3a+2}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2c+3a=1$

Với $x>0, y>0, z>0$, ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\overset{cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{xyz}.\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$$

Do đó: $P\geq 3\left(\frac{1}{2a+3b+2}+\frac{1}{2b+3c+2}+\frac{1}{2c+3a+2}\right)$

$$\geq\frac{27}{2a+3b+2+2b+3c+2+2c+3a+2}=\frac{27}{5a+5b+5c+6}=3$$

Vậy $\min P=3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1/5$

Bài 9: Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z^2\right)}+\frac{2y^2+yz}{\left(z+\sqrt{xy}+x^2\right)}+\frac{2z^2+zx}{\left(x+\sqrt{yz}+y\right)^2}\geq 1$$

Bài giải

Ta có $\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2=\left(\sqrt{y}.\sqrt{y}+\sqrt{x}.\sqrt{z}+\sqrt{z}.\sqrt{z}\right)^2\leq(y+x+z)(y+z+z)$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}\geq\frac{1}{(x+y+z)(y+2z)}\Leftrightarrow\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}\geq\frac{2x^2+xy}{(x+y+z)(y+2z)}$$

$$=\frac{1}{(x+y+z)}\left(\frac{2x^2+xy}{y+2z}+x-x\right)=\frac{1}{(x+y+z)}\left(\frac{2x^2+2xy+2xz}{y+2z}-x\right)=\frac{2x}{y+2z}-\frac{x}{x+y+z}$$

Tương tự, cộng lại ta được:

$$VT\ (1)\geq\frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}-1=2\left(\frac{x^2}{xy+2xz}+\frac{y^2}{yz+2yx}+\frac{z^2}{zx+2zy}\right)-1\geq\frac{2(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}-1$$

Chứng minh được $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ .Suy ra VT $(1)\geq 2-1=1$

Đẳng thức xảy ra $x=y=z$

Bài 10: Cho a,b,c là các dương thoả mãn: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)=ab+bc+ca+3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{a+b+c+3}$$

Bài giải

Với a,b,c là các dương ta có: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}$ và $ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$

Bởi vậy: $\frac{2(a+b+c)^2}{3}\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}+3\Leftrightarrow(a+b+c)^2\leq 9$, từ đó: $0<a+b+c\leq 3$

Tacó: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)=ab+bc+ca\leq ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}+3$

Nên $\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\frac{(a+b+c)^2}{6}+\frac{3}{2}$

Bởi vậy: $S = a^2 + b^2 + c^2 - \dfrac{1}{a+b+c+3} \le \dfrac{(a+b+c)^2}{6} - \dfrac{1}{a+b+c+3} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{1}{t+3} + \dfrac{3}{2}$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{1}{t+3} + \dfrac{3}{2}$ với $0 < t \le 3$ và $f'(t) = \dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{(t+3)^2} > 0, \forall t \in (0;3)$

Bởi vậy: $f(t) \le f(3), \forall t \in (0;3]$ hay $f(t) \le \dfrac{17}{6}$

Suy ra: $S \le \dfrac{17}{6}$, dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1. Vậy $\max S = \dfrac{17}{6}$ khi $a = b = c = 1$

Bài 11: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2) \le 18$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{(x+y+z)^4}{3(x^2+y^2+z^2)}$.

Bài giải

Từ giả thuyết ta có $0 \le x, y, z \le 3$ và x + y + z > 0

Suy ra $x^2 \le 3x, y^2 \le 3y, z^2 \le 3z$ .Do đó $x^2 + y^2 + z^2 \le 3(x+y+z)$.

Khi đó $P \le 3(x+y+z) - \dfrac{(x+y+z)^4}{9(x+y+z)} = 3(x+y+z) - \dfrac{1}{9}(x+y+z)^3$. (1)

Đặt t = x + y + z, t > 0.

Xét hàm số $f(t) = 3t - \dfrac{1}{9}t^3$ với t > 0.

Ta có $f'(t) = 3 - \dfrac{1}{3}t^2$; $f'(t) \ge 0 \Leftrightarrow 0 < t \le 3$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(t) \le f(3) = 6$ với mọi t > 0. (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \le 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi x = 3, y = z = 0 hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 6, đạt được khi x = 3, $y = z = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài 12: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $4(a^3+b^3) + c^3 = 2(a+b+c)(ac+bc-2)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)} + \dfrac{b+c}{a+b+c+2} - \dfrac{(a+b)^2+c^2}{16}$

Bài giải

Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)\left[\dfrac{1}{4}(a+b)^2 + \dfrac{3}{4}(a-b)^2\right] \ge \dfrac{(a+b)^3}{4}$ Dấu "=" khi a = b

$\Rightarrow 4(a^3+b^3) + c^3 \ge (a+b)^3 + c^3 \ge \dfrac{(a+b+c)^3}{4}$

$2(a+b+c)(ca+cb-2) = 2(a+b+c)\left[c(a+b)-2\right] \le 2(a+b+c)\left[\dfrac{(a+b+c)^2}{4} - 2\right]$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^3}{4} \le 2(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{4}-2\right] \Rightarrow a+b+c \ge 4$$

$$\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)} = \frac{2a^2}{2a^2+2ac+(b^2+a^2)+4a} = \frac{a}{4a+c+\left(\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}\right)} \le \frac{a}{a+b+c+2}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{a}{a+b+c+2} + \frac{b+c}{a+b+c+2} = \frac{a+b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b)^2+c^2}{16}$$

$$\le \frac{a+b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b+c)^2}{32} = f(t) = \frac{t}{t+2} - \frac{t^2}{32}$$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+2)^2} - \frac{t}{16} = \frac{32-t(t+2)^2}{16(t+2)^2} < 0 \quad \forall t \ge 4$$

$$\Rightarrow f(t) < f(4) = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow MinP = \frac{1}{6}$ khi $a=b=1; c=2$

Bài 13: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Bài giải

Ta có $1=(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Do đó $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2$. Vì $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$ nên $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$

Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 < a+b+c = 1$

Mặt khác $1=(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \overset{B.C.S}{\le} 3(a^2+b^2+c^2)$

Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}$; $t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$ $f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$

Suy ra $f(t) \ge \frac{324}{7}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$. Vậy $A \ge \frac{324}{7}$ với mọi $a;b;c$ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$a=\frac{1}{2}; b=\frac{1}{3}; c=\frac{1}{3}$ thì $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = \frac{7}{18} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ và $A = \frac{324}{7}$

Vậy $\min A = \dfrac{324}{7}$

Bài 14: Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8+a+2b+3c} + \frac{1}{4+b+2c}$$

Bài giải

Ta có $2\sqrt{2bc} \le b+2c \Rightarrow \dfrac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} \ge \dfrac{1}{4a+4b+4c}$ và $\dfrac{-4}{8+a+2b+3c} \ge \dfrac{-1}{4+a+b+c} + \dfrac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P \ge \dfrac{1}{4(a+b+c)} + \dfrac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t = a+b+c,\ t > 0$

xét $f(t) = \dfrac{1}{4t} + \dfrac{-1}{4+t}, t > 0 \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{1}{4t^2} + \dfrac{1}{(4+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = b+2c \\ a+b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Bài 15: Cho các số thực dương a,b,c thỏa $9ab+17bc+14ac+12c-18>0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{8(7+ab)\sqrt{5}}{3\sqrt{9ab+17bc+14ac+12c-18}} + \dfrac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$

Bài giải

$a^2+b^2+c^2 = 14 \Leftrightarrow 14+2ab = (a+b)^2 + c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{2}$

Ta lại có: $(a+b-c)^2 + (3b-2c)^2 + (3a-c)^2 + 4(c-3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 5(a+b+c)^2 \ge 9ab+17bc+14ac+12c-18$

$\Rightarrow P \ge \dfrac{3}{2}(a+b+c) + \dfrac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$

Đặt $t = a+b+c, t \in \left(0;\sqrt{42}\right] \Rightarrow P \ge f(t) = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{36}{\sqrt{t+3}} = f(t)$

$f'(t) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{18}{(t+3)\sqrt{t+3}} = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Vẽ bảng biến thiên thấy $MinP = f(6) = 16$

<u>Câu 16</u> : Cho cac số thực dương a,b,c .Tìm GTNN của

$$P = \frac{1}{3a+2b+6\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{7+b+5c} - \frac{4}{14+a+2b+6c}$$

Ta có : $6\sqrt[3]{abc} = 6\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}b(2c)} \le 6\dfrac{\dfrac{a}{2}+b+2c}{3} = a+2b+4c \Rightarrow \dfrac{1}{3a+2b+6\sqrt[3]{abc}} \ge \dfrac{1}{4(a+b+c)}$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} + \frac{4}{4(7+b+5c)} - \frac{4}{14+a+2b+6c} \geq \frac{9}{4(7+a+2b+6c)} - \frac{4}{14+a+2b+6c} = f(a+2b+6c)$$

$$\geq f(14) = \frac{-1}{28} \Rightarrow P_{\min} = \frac{-1}{28} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+6c=14 \\ \frac{a}{2}=b=2c \end{cases}$$

§6: BẤT ĐẲNG THỨC XỬ LÝ CỤM X²Y+Y²Z+Z²X

Bài 1: Cho các số thực không âm a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh bất đẳng thức :
$P=(a^2+b^2+c^2)^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}(a^2b+b^2c+c^2a)\le 17$

Bài giải

Ta có : $a^2+b^2+c^2\le a^2+b^2+c^2+abc=a^2+b^2+c^2+\sqrt{a^2b^2c^2}\le a^2+b^2+c^2+\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27}}$

$\Rightarrow 4\ge a^2+b^2+c^2\ge 3$

Giả sử : $a\le c\le b\Rightarrow a(c-a)(c-b)\le 0\Leftrightarrow ac^2+a^2b\le abc+a^2c\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\le abc+a^2c+b^2c$

Mặt khác : $4=a^2+b^2+c^2+abc\ge\frac{1}{2}(b^2+a^2)+\frac{1}{2}(b^2+a^2)+c^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^2(a^2+b^2)^2}{4}}\Rightarrow c(a^2+b^2)\le\frac{16}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow P\le(a^2+b^2+c^2)^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}(abc+c(a^2+b^2))\le(a^2+b^2+c^2)^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}\left[4-(a^2+b^2+c^2)\right]+1$

Xét hàm số $f(t)=t^2-\frac{3\sqrt{3}}{16}t+\frac{3\sqrt{3}}{4}+1$ với $t=a^2+b^2+c^2;4\ge t\ge 3\Rightarrow f(t)_{max}=f(4)=17$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=5$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a^4b+b^4c+c^4a$

Bài giải

Trong 3 số a, b, c có 1 số nằm giữa 2 số chẳng hạn là b nên ta có $c(b-a)(b^3-c^3)\le 0$ (1)

$(1)\Leftrightarrow b^4c+c^4a\le c^4b+ab^3c\Leftrightarrow S=a^4b+b^4c+c^4a\le b(a^4+c^4+b^2ac)\le b(a^4+c^4+(a+c)^2ac)\le b(a+c)^4$

$=\frac{1}{4}.4b(a+b)\le\frac{1}{4}\left[\frac{4b+(a+c)+(a+c)+(a+c)+(a+c)}{5}\right]^5=256$ (2)

Dấu bằng xảy ra ở (2) $\Leftrightarrow a=4;b=1;c=0$

Vậy GTLN của $F(a;b;c)=256$ đạt được khi $a=4;b=1;c=0$

Bài 3 : Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $\begin{cases}y\ge x\\ z^2(4-y)+4y(z-2)\ge y^3\end{cases}$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=\frac{zy^3+xz^3+xyz-yz^3}{y+1}-\left(\frac{xyz}{4\sqrt{2}}\right)^2$

Bài giải

$z^2(4-y)+4y(z-2)\ge y^3\Rightarrow 4z(y+z)\ge y(y^2+z^2+8)\ge 4y(y+z)\Rightarrow z\ge y$

Từ đây ta có: $0 < x \le y \le z$ với đk này ta có bổ đề sau: $\dfrac{zy^3 + xz^3 + xyz - yz^3}{y+1} \le xyz$, Thật vậy ta có:

$z(y-x)(y^2 - z^2) \le 0 \Leftrightarrow zy^3 + z^3x - yz^3 \le xy^2z \Leftrightarrow zy^3 + z^3x - yz^3 + xyz \le (y+1)xyz$

Áp dụng bổ đề ta có: $P \ge xyz - \left(\dfrac{xyz}{4\sqrt{2}}\right)^2 = 8 - \dfrac{1}{32}(xyz-16)^2 \le 8$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 4 \\ y = z = 2 \end{cases}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$

Bài giải

Đặt $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$ .Ta có:

$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}); x = x_2 = \frac{1}{6}(y + \sqrt{y^2 + 6z^2})$ Nhận xét:

$x_1 \notin (0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2 \in (0;1)$ hay $x_2 \notin (0;1)$ thì $\underset{x\in[0;1]}{Max} f(x) = Max\{f(0); f(1)\}$.

Mà $f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \le 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$

$\Rightarrow \quad f(x) \le f(1) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2 \qquad (1)$

Lại đặt $g(y) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2$,

$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1;\ g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1 = \frac{1}{6}(z - \sqrt{z^2 + 6}); y = y_2 = \frac{1}{6}(z + \sqrt{z^2 + 6})$

Nhận xét tương tự suy ra $\underset{y\in[0;1]}{Max} g(y) = Max\{g(0); g(1)\}$.

Lại có $g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \le 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1)$. Suy ra

$g(y) \le g(1) = 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \qquad (2)$

Cuối cùng đặt $h(z) = 2z^3 - z^2 - z + 3$ với $z \in [0;1]$, $h'(z) = 6z^2 - 2z - 1$.

$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{6}; z_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{6}$. Lập bảng biến thiên suy ra: $\underset{z\in[0;1]}{Max} h(z) = h(1) = 3 \quad (3)$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$

Bài giải

Đặt $f(x)=2x^3-yx^2-z^2x+2(y^3+z^3)-y^2z$.Ta có:

$f'(x)=6x^2-2yx-z^2;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1=\frac{1}{6}(y-\sqrt{y^2+6z^2});x=x_2=\frac{1}{6}(y+\sqrt{y^2+6z^2})$ Nhận xét:

$x_1\notin(0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2\in(0;1)$ hay $x_2\notin(0;1)$ thì $\underset{x\in[0;1]}{Max} f(x)=Max\{f(0);f(1)\}$.

Mà $f(0)=2(y^3+z^3)-y^2z\le 2(y^3+z^3)-y^2z+(2-y-z^2)=f(1)$

$\Rightarrow\ f(x)\le f(1)=2y^3-zy^2-y+2z^3-z^2+2 \qquad (1)$

Lại đặt $g(y)=2y^3-zy^2-y+2z^3-z^2+2$,

$g'(y)=6y^2-2zy-1;\ g'(y)=0\Leftrightarrow y=y_1=\frac{1}{6}(z-\sqrt{z^2+6});y=y_2=\frac{1}{6}(z+\sqrt{z^2+6})$

Nhận xét tương tự suy ra $\underset{y\in[0;1]}{Max}\, g(y)=Max\{g(0);g(1)\}$.

Lại có $g(0)=2z^3+2-z^2\le 2z^3+2-z^2+(1-z)=g(1)$. Suy ra

$g(y)\le g(1)=2z^3+2-z^2+(1-z)=2z^3-z^2-z+3 \qquad (2)$

Cuối cùng đặt $h(z)=2z^3-z^2-z+3$ với $z\in[0;1]$, $h'(z)=6z^2-2z-1$.

$h'(z)=0\Leftrightarrow z_1=\frac{1-\sqrt{7}}{6};z_2=\frac{1+\sqrt{7}}{6}$. Lập bảng biến thiên suy ra: $\underset{z\in[0;1]}{Max}\, h(z)=h(1)=3 \quad (3)$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi $x=y=z=1$

Bài 6: Cho các số x,y,z thỏa mãn $0<x\le y\le z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=xy^2+yz^2+zx^2-xyz-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{6}.$$

Bài giải

Vì $0<x\le y\le z$ nên

$$x(x-y)(y-z)\ge 0\Leftrightarrow (x^2-xy)(y-z)\ge 0\Leftrightarrow x^2y-x^2z-xy^2+xyz\ge 0\Leftrightarrow x^2y+xyz\ge x^2z+xy^2$$

$$xy^2+yz^2+zx^2-xyz=\left(x^2z+xy^2\right)+yz^2-xyz\le\left(x^2y+xyz\right)+yz^2-xyz=y\left(x^2+z^2\right)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y\left(x^2+z^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2y^2(x^2+z^2)(x^2+z^2)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2y^2+(x^2+z^2)+(x^2+z^2)}{3}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}$$

Do đó $P=xy^2+yz^2+zx^2-xyz-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{6}\le 2\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}-\frac{3}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$

Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)}$ $(t>0)$. Ta có $P\le f(t)=2t^3-\frac{3}{2}t^4$. $f'(t)=6t^2-6t^3=6t^2(1-t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ suy ra được $f(t)\le f(1)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow P\le\frac{1}{2}$.

Ta thấy $P=\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $Max\,P=\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Bài 7: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2\ln\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a-2}-2\left(ab+bc+ca\right)$$

Bài giải

$3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\le\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow 3a^2b+3b^2c+3c^2a$

$\le a^3+ab^2+ac^2+ba^2+b^3+bc^2+ca^2+cb^2+c^3$

$\Leftrightarrow\left(a^3+ab^2-2a^2b\right)+\left(b^3+bc^2-2b^2c\right)+\left(ac^2+c^3-2c^2a\right)\ge 0\Leftrightarrow a\left(a-b\right)^2+b\left(b-c\right)^2+c\left(c-a\right)^2\ge 0$

$\Rightarrow\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\le a^2+b^2+c^2$ dấu bằng khi: $a=b=c$

$a+b+c=3\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2\left(ab+ac+bc\right)=9\Rightarrow -2\left(ab+ac+bc\right)=a^2+b^2+c^2-9$

$$P\ge 2\ln\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{1}{a^2+b^2+c^2-2}+a^2+b^2+c^2-9$$

$t=a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=3$

Xét $f\left(t\right)=2\ln t+\frac{1}{t-2}+t-9$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{2}{t}+1-\frac{1}{\left(t-2\right)^2}=\frac{2\left(t-2\right)^2+t\left(t-2\right)^2-1}{t\left(t-2\right)^2}>0$

$\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến $\Rightarrow f\left(t\right)_{\min}=f\left(3\right)=2\ln 3-5$

Dấu bằng xảy ra khi: $a=b=c=1$

Bài 8 : Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases}a\ge b\ge c\ge\frac{1}{\sqrt{5}}\\ a^2+b^2+c^2=3\end{cases}$ tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=2(a+b+c-abc)+\frac{5}{a^3b+b^3c+c^3a}-\frac{5c^2}{6}$$

Bài giải

Ta có $a^3b+b^3c+c^3a\le a^3b+b^3a+c^2ab=ab(a^2+b^2+c^2)=3ab$ từ đó

$P\ge 2(a+b+c-ab)+\frac{5}{3ab}-\frac{5c^2}{6}=f(a,b)$ bây giờ ta sẽ thực hiện phép dồn biến:

$$f(a,b)-f\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)=2\left(a+b-\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)+\frac{5}{3ab}-\frac{10}{3(a^2+b^2)}+\frac{c(a^2+b^2-2ab)}{2}$$

$$=\frac{5(a-b)^2}{3ab(a^2+b^2)}+\frac{c(a-b)^2}{2}-\frac{2(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ge\frac{5(a-b)^2}{3ab(a^2+b^2)}-\frac{(a-b)^2}{a+b}$$ chú ý là:

$3ab(a^2+b^2)\le\frac{3(a+b)}{2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^3}{2}}$ và từ $c^2\ge\frac{1}{5}\Rightarrow a^2+b^2=3-c^2\le\frac{14}{5}$ do đó

$$\frac{5(a-b)^2}{3ab(a^2+b^2)}-\frac{(a-b)^2}{a+b}\ge\frac{20(a-b)^2}{3(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)^3}}-\frac{(a-b)^2}{a+b}\ge\frac{20(a-b)^2}{3(a+b)\sqrt{2\left(\frac{14}{5}\right)^3}}-\frac{(a-b)^2}{a+b}\ge 0$$

Ta được $P\ge f\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)=2\sqrt{2(a^2+b^2)}+\frac{10}{3(a^2+b^2)}+2c-c(a^2+b^2)-\frac{5c^2}{6}$

$=2\sqrt{2(3-c^2)}+\frac{10}{3(3-c^2)}+c(c^2-1)-\frac{5c^2}{6}=g(c).$ trong đó $\frac{1}{\sqrt{5}}\le c\le 1$

$g'(c)=3c^2-1-2\sqrt{\frac{2}{3-c^2}}+\frac{20c}{3(3-c^2)^2}-\frac{5c}{3}$ chú ý rằng : $\frac{20c}{3(3-c^2)^2}-\frac{5c}{3}\le\frac{20c}{3.(3-1)^2}-\frac{5c}{3}=0$

Và: $3c^2-1-2\sqrt{\frac{2}{3-c^2}}=3c^2-1-\frac{4}{\sqrt{2(3-c^2)}}\le 3c^2-1-\frac{8}{5-c^2}=\frac{(c^2-1)(13-c^2)}{5-c^2}\le 0$

$\Rightarrow g'(c)\le 0\to g(c)\ge g(1)=\frac{29}{6}$. Vậy $\min P=\frac{29}{6}.khi: a=b=c=1$

§7: BẤT ĐẲNG THỨC XỬ LÝ CỤM XYZ

Bài 1: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{81abc+2}{9}+b+c+3\left(2a^3+b^3+c^3\right)$

Bài giải

Ta có bổ đề sau: $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le xyz$

Chứng minh $\sqrt{(x+y-z)(z+x-y)}\le\frac{x+y-z+z+x-y}{2}=x$ tương tự vs 2 biểu thức còn lại, ta có đpcm

Áp dụng kết hợp : $a+b+c=1$ Ta có: $(1-2a)(1-2b)(1-2c)\le abc\Leftrightarrow 9abc+1\ge 2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)(*)$

Mặt khác theo $AM-GM$ ta có: $3\left(a^3+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\right)\ge a\quad(**)$

Từ (*) và (**) ta có: $\frac{81abc+2}{9}+b+c+3a^3\ge 9abc+a+b+c=9abc+1\ge 2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Theo $Bunhiacopski$ ta lại có: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Từ đây ta sẽ có: $P\ge 2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\frac{5}{3}+3\left(a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}\right)^2\ge\frac{5}{3}$

Dấu bằng khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 2: Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=3\end{cases}$ Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\left(\frac{1}{xz}+\frac{x}{6yz}+\frac{z}{6xy}\right)(3-y)+2\sqrt[3]{xyz}$ + Ta có

Bài giải

$$\left(\frac{1}{xz}+\frac{x}{6yz}+\frac{z}{6xy}\right)(3-y)=\frac{1}{3}\left(\frac{x+y+z}{xz}+\frac{x}{2yz}+\frac{z}{2xy}\right)(z+x)=\frac{1}{3}\frac{(y+z)^2+(y+x)^2}{2xyz}(x+z)$$

$$\ge\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{3xyz}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge\frac{1}{3}\left(2+2.\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Suy ra $P\ge\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}2\sqrt[3]{xyz}\ge\frac{14}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi và chi khi $x=y=z=1$

Bài 2: Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $\begin{cases} y\ge x \\ z^2(4-y)+4y(z-2)\ge y^3 \end{cases}$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{zy^3+xz^3+xyz-yz^3}{y+1}-\left(\frac{xyz}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

Bài giải

$z^2(4-y)+4y(z-2)\ge y^3 \Rightarrow 4z(y+z)\ge y\left(y^2+z^2+8\right)\ge 4y(y+z)\Rightarrow z\ge y$

Từ đây ta có: $0<x\le y\le z$ với đk này ta có bổ đề sau $\dfrac{zy^3+xz^3+xyz-yz^3}{y+1}\le xyz$

Thật vậy ta có: $z(y-x)\left(y^2-z^2\right)\le 0 \Leftrightarrow zy^3+z^3x-yz^3\le xy^2z \Leftrightarrow zy^3+z^3x-yz^3+xyz\le (y+1)xyz$

Áp dụng bổ đề ta có: $P\ge xyz-\left(\dfrac{xyz}{4\sqrt{2}}\right)^2=8-\dfrac{1}{32}(xyz-16)^2\le 8$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=4 \\ y=z=2 \end{cases}$

Bài 4 : Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$

Tìm GTNN của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2$

Bài giải

Giả sử $x=\min\{x,y,z\}\Rightarrow x\in[0;1]$

Ta có $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+xz)\right]+3xyz=27-9(xy+yz+xz)+3xyz$

$P=x^3+y^3+z^3=27-9(xy+yz+xz)+3xyz+x^2y^2z^2$

$=(xyz-1)^2-1+27+5xyz-9(xy+yz+xz)\ge 26+5xyz-9(xy+yz+xz)=26-9(xy+xz)-yz(9-5x)$

Do $x\in[0;1]\Rightarrow 9-5x>0\Rightarrow -yz(9-5x)\ge -\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2(9-5x)=-\left(\dfrac{3-x}{2}\right)^2(9-5x)$

$\Rightarrow P\ge 26-9x(3-x)-\left(\dfrac{3-x}{2}\right)^2(9-5x)=\dfrac{5x^3-3x^2-9x+23}{4}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{5x^3-3x^2-9x+23}{4}$ với $x\in[0;1]\Rightarrow f(x)_{\min}=f(1)=4$

Vậy $P_{\min}=4$ tại $x=y=z=1$

Bài 5 : Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\dfrac{a+b+c}{2016}\right)^2\le 4abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ca}}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{ab}}$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$P=\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{ab}}\le\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}}+\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ca}}}+\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}+\frac{1}{\sqrt[4]{bc}}+\frac{1}{\sqrt[4]{ca}}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}}\le\frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$$

Lại có: $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2\le 4abc\Leftrightarrow a+b+c\le 4032\sqrt{abc}$

$\Rightarrow P\le\frac{4032}{2}=2016$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=b=c\\ \left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2\le 4abc\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{1344^2}$

Vậy $MaxP=2016$ khi $a=b=c=\frac{1}{1344^2}$

Bài 5 : cho các thực dương x,y,z sao cho $xy+yz+zx=2$ tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{x^2+y^2+8zx+4yz+2x+4z}{z(x^2+y^2+2x)}-\frac{yz(1-5xyz)+3\sqrt{1+5x^2y^2z^2}}{xyz}$$

Bài giải

Kết cấu bài toán khá cồng kềnh và dễ làm ta rối loạn . nhưng hãy để ý hệ số 'đặc biệt' :

$3\sqrt{1+5x^2y^2z^2}=\sqrt{(4+5)(1+5x^2y^2z^2)}\ge 2+5xyz$ các hệ số có gì đó gợi mở bài toán

Đề bài là xy+yz+zx=2 .ở P lại có x^2+y^2 ta sẽ thử đánh giá về 2xy xem..và điều bất ngờ sẽ tới :

$$\frac{x^2+y^2+8zx+4yz+2x+4z}{z(x^2+y^2+2x)}=\frac{1}{z}+\frac{8zx+4yz+4z}{z(x^2+y^2+2x)}\le\frac{1}{z}+\frac{8zx+4yz+4z}{2zx(y+1)}=\frac{1}{z}+\frac{4}{y+1}+\frac{2}{x}$$

Ngoài ra chú ý ở trên thì : $3\sqrt{1+5x^2y^2z^2}=\sqrt{(4+5)(1+5x^2y^2z^2)}\ge 2+5xyz$ nên

$$\frac{yz(1-5xyz)+3\sqrt{1+5x^2y^2z^2}}{xyz}\ge\frac{yz(1-5xyz)+2+5xyz}{xyz}=\frac{yz+2}{xyz}=\frac{2yz+x(y+z)}{xyz}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Từ đó $P\le\frac{2}{x}+\frac{1}{z}+\frac{4}{y+1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{4}{y+1}-\frac{1}{y}=1-\frac{(y-1)^2}{y(y+1)}\le 1$

Max P=1 khi $(x,y,z)=\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$

<u>Bài 6 :</u> Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=0;\ a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=a^2b^2c^2$.

<u>Bài giải</u>

Từ gt ta có: $\begin{cases}b+c=-a\\ bc=a^2-3\end{cases}$ Hệ có nghiệm khi $a^2\ge 4(a^2-3)\Leftrightarrow a^2\le 4\Rightarrow a^2\in[0;4]$

$F=a^2b^2c^2=a^2\left(a^2-3\right)^2=t^3-6t^2+9t,\ t=a^2\in[0;4];\ F_t'=3t^2-12t+9;\ F_t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in[0;4]\\t=3\in[0;4]\end{array}\right.$

$F(0)=F(3)=0;\ F(1)=F(4)=4$

Suy ra $\max F=4$ khi $(a;b;c)=(2;-1;-1)$ hoặc các hoán vị hoặc $(a;b;c)=(-2;1;1)$ hoặc các hoán vị.

Bài 7 : Cho các số x,y,z thỏa mãn $0<x\le y\le z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=xy^2+yz^2+zx^2-xyz-\dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{6}$.

Bài giải

Vì $0<x\le y\le z$ nên

$x(x-y)(y-z)\ge 0\Leftrightarrow (x^2-xy)(y-z)\ge 0\Leftrightarrow x^2y-x^2z-xy^2+xyz\ge 0\Leftrightarrow x^2y+xyz\ge x^2z+xy^2$

$xy^2+yz^2+zx^2-xyz=\left(x^2z+xy^2\right)+yz^2-xyz\le\left(x^2y+xyz\right)+yz^2-xyz=y\left(x^2+z^2\right)$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y\left(x^2+z^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2y^2(x^2+z^2)(x^2+z^2)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2y^2+(x^2+z^2)+(x^2+z^2)}{3}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}$$

Do đó $P=xy^2+yz^2+zx^2-xyz-\dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{6}\le 2\sqrt{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$

Đặt $t=\sqrt{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)}\ (t>0)$. Ta có $P\le f(t)=2t^3-\dfrac{3}{2}t^4$; $f'(t)=6t^2-6t^3=6t^2(1-t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ suy ra được $f(t)\le f(1)=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow P\le\dfrac{1}{2}$.

Ta thấy $P=\dfrac{1}{2}$ khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $Max\,P=\dfrac{1}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Bài 8 : Cho các số thực dương x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\dfrac{9}{7x+y+4\sqrt{xy}+18.\sqrt[3]{xyz}}+\dfrac{1}{2}(x+y+z)^2+2$.

Bài giải

Ta có: $4\sqrt{xy}=2\sqrt{x.4y}\le x+4y$; $18\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{x.4y.9z}\le x+4y+9z$

Dấu "=" xảy ra khi x = 4y = 9z

Suy ra $P\ge\dfrac{1}{x+y+z}+\dfrac{1}{2}(x+y+z)^2+2$

Đặt $t=x+y+z,(t>0)$, xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t}+2$ (t > 0)

Lập bảng biến thiên tìm được $\min f(t)=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow t=1$

Vậy $\min P = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{36}{49}; y = \frac{9}{49}; z = \frac{4}{49}$

Bài 9 : Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài giải

Áp dụng bđt Cosi cho 3 số dương $\frac{1}{2xyz}, \frac{1}{2xyz}, \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ ta được:

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{1}{2xyz} + \frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{\sqrt{x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

Ta có: $x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x) = xyz(zx+yz)(xy+zx)(yz+xy)$

Áp dụng bđt Cosi cho 3 số dương xy, yz, zx: $xy.yz.zx \leq \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow x^2y^2z^2 \leq 1 \Rightarrow xyz \leq 1$ (1)

Áp dụng bđt Cosi cho 3 số dương $zx + yz, xy + zx, yz + xy$:

$$(zx+yz)(xy+zx)(yz+xy) \leq \left[\frac{(zx+yz)+(xy+zx)+(yz+xy)}{3}\right]^3 = 8 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x) \leq 8$

Vậy: $\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Bài 10 : Cho x ; y ; z là các số thực dương thay đổi sao cho x + y + z = 2. Tìm gía trị nhỏ nhất của biểu thức: F = $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

Bài giải

Không mất tính tổng quát, giả sử z là số nhỏ nhất. Lúc đó 0 < z < 1 (vì z $\geq$1 thì x + y + z > 2).

Ta có F = $(x+y)^2 + z^2 + 2xy(z-1) = (2-z)^2 + z^2 - 2xy(1-z)$

Mặt khác $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-z}{2}\right)^2$ nên $-2xy(1-z) \geq -2\left(\frac{2-z}{2}\right)^2(1-z)$.

Từ đó $F \geq \frac{1}{2}(z^3 - z^2 + 4)$ (1). Xét $f(z) = \frac{1}{2}(z^3 - z^2 + 4)$ với 0 < z <1 .

Ta có $f'(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 2z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2}{3} \in (0;1)$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(z) \geq \frac{52}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $F \geq \frac{52}{27}$. Vậy $F_{\min} \geq \frac{52}{27}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Bài 11: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y+z)^2 - \dfrac{x^3+y^3+z^3}{9xyz} + \dfrac{3}{xy+yz+zx}$.

Bài giải

Ta có $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \Rightarrow (x+y+z)^2 = 3+2(xy+yz+zx)$

Lại có $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)]+3xyz$

$= (x+y+z)[3-(xy+yz+zx)]+3xyz$ nên $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{9xyz} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}\right)[3-(xy+yz+zx)]$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $\begin{cases} xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2.y^2.z^2} \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2.y^2.z^2}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz} \ge \dfrac{9}{xy+yz+zx}$

Suy ra $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{9xyz} \ge \dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{xy+yz+zx}\right)[3-(xy+yz+zx)]$

Từ đó ta có:

$P \le 3+2(xy+yz+zx)-\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{xy+yz+zx}\right)[3-(xy+yz+zx)]+\dfrac{3}{xy+yz+zx} = \dfrac{11}{3}+2(xy+yz+zx)$

Do $0 < xy+yz+zx \le \dfrac{x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2}{2} = 3$ nên $P \le \dfrac{11}{3}+6 = \dfrac{29}{3}$

Từ đó suy ra GTLN của P là $\dfrac{29}{3}$ đạt khi $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ xy=yz=xz \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 12: Cho $x, y, z > 0, x^2+y^2+z^2 = xy+xz+10yz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 8xyz - \dfrac{3x^3}{y^2+z^2}$

Bài giải

Cách 1

$8(x^2+y^2+z^2) = 8xy+8xz+80yz \le x^2+16y^2+x^2+16z^2+40y^2+40z^2 \Rightarrow x^2 \le 8y^2+8z^2$

$12yz = x^2+(y+z)^2-x(y+z)$

$12yz = \dfrac{1}{4}x^2 - x(y+z)+(y+z)^2+\dfrac{3}{4}x^2 = \left(\dfrac{x}{2}-y-z\right)^2+\dfrac{3}{4}x^2 \ge \dfrac{3}{4}x^2 \Rightarrow x^2 \le 16yz$

$\Rightarrow P \ge \dfrac{x^3}{2}-24x = f(x) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=16$

$Min\, f(x) = f(4) = -64$

Khi x = 4 , y = z = 1

Cách 2

$x^2+y^2+z^2=xy+xz+10yz\Rightarrow (y+z)^2+x^2=xy+xz+16yz$

$=x(y+z)+16yz\le x(y+z)+3(y+z)^2\Rightarrow x^2-x(y+z)-2(y+z)^2\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x}{y+z}\in[-1,2], x,y,z>0$

$\Rightarrow x\le 2(y+z)\le 2\sqrt{2(y^2+z^2)}\Rightarrow x^2\le 8(y^2+z^2)\Rightarrow y^2+z^2\ge \dfrac{x^2}{8}$

$12yz=x^2-x(y+z)+(y+z)^2\Rightarrow x2\le 16yz$

$\Rightarrow P\ge \dfrac{x^3}{2}-24x=f(x)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=16$

$M\text{ in } f(x)=f(4)=-64$

Bài 13 : Cho *x*, *y*, *z* là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2\le\dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=8xyz+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$.

Bài giải

Ta có $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2y^2z^2}}$, đặt $t=\sqrt[3]{xyz}>0$. Mà $\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow 0<t\le\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow P\ge 8t^3+\dfrac{3}{t^2}$. Xét hàm số $f(t)=8t^3+\dfrac{3}{t^2}$.

Ta có $\forall t\ne 0, f'(t)=24t^2-\dfrac{6}{t^3}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$.

Từ bảng ta có *f*(*t*) ≥ 13 với mọi giá trị *t* thỏa mãn $0<t\le\dfrac{1}{2}$

Suy ra *P* ≥ 13. Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{1}{2}$ hay $x=y=z=\dfrac{1}{2}$ Kl: Min*P* = 13.

§7: BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2-2b+3}+\frac{2b^3}{c^3+a^2-2a-3c+7}+\frac{3c^3}{a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11}\le\frac{3}{2}$$

Bài giải

$$c^3=\frac{c^3+c^3+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3c^2-1}{2};a^4+1\ge 2a^2\Rightarrow\frac{a^3}{b^2-2b+3}+\frac{2b^3}{c^3+a^2-2a-3c+7}+\frac{3c^3}{a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11}$$

$$\le\frac{a^3}{(b-1)^2+2}+\frac{2b^3}{(a-1)^2+\frac{3}{2}(c-1)^2+4}+\frac{3c^3}{3(a-1)^2+(b^2-1)^2+6}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{2}=\frac{3}{2}$$

Bài 2: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}a+b+c=1\\a\ge b\ge c\end{cases}$

Tìm GTNN của biểu thức: $M=\frac{a}{(a+b)(a^2+b\ \ )}+\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{7}{8}\sqrt{1+c^2}$

Bài giải

Ta có: $\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)}\ge\frac{5}{8}a-\frac{3}{8}b$ và dấu "=" xảy ra khi a = b

CM: $8a^4\ge(5a-3b)(a+b)(a^2+b^2)\Leftrightarrow 3a^4+3b^4\ge 2ab^2+2a^3b+2ab^3\Rightarrow$ đúng

Ta có: $\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}a$ và dấu "=" xảy ra khi a = b

CM: $3b^3\ge(2b-a)(a^2+ab+b^2)\Leftrightarrow b^3+a^3\ge a^2b+ab^2$ đúng $\forall a,b>0$

$$\Rightarrow M\ge\frac{5}{8}a-\frac{3}{8}b+\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}a+\frac{7}{8}.\sqrt{1+c^2}\Leftrightarrow M\ge\frac{7}{24}a+\frac{7}{24}b+\frac{7}{8}\sqrt{1+c^2}$$

Do a + b + c = 1 ⇔ a + b = 1 – c $\Rightarrow M\ge\frac{7}{8}\left(\frac{1-c}{3}+\sqrt{1+c^2}\right)$

Đặt $f(c)=\frac{1}{3}-\frac{c}{3}+\sqrt{1+c^2}$ với $0<c\le\frac{1}{3}\left(do\begin{cases}a\ge b\ge c>0\\a+b+c=1\end{cases}\Rightarrow c<c\le\frac{1}{3}\right)$

'(vì $c\le\frac{1}{3}\Rightarrow 3c\le 1$ và $\sqrt{1+c^2}>1$

Suy ra hàm số f(c) liên tục và nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{3}\right]$

$$\Rightarrow f(c)\ge f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\frac{2}{9}+\frac{\sqrt{10}}{3}\Rightarrow M\ge\frac{7}{8}.\left(\frac{2}{9}+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

KL: GTNN của M là : $\frac{7}{8}.\left(\frac{2}{9}+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ khi $c=\frac{1}{3}=a=b$

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$

Tìm GTNN của biểu thức : $S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài giải

Nhận xét: $8a+\frac{5}{a}\geq\frac{3a^2+23}{2}$ (1) với mọi $0<a<\sqrt{3}$ dấu bằng khi a = 1, thật vậy

$8a+\frac{5}{a}\geq\frac{3a^2+23}{2}\Leftrightarrow 3a^3-16a^2+23a-10\leq 0\Leftrightarrow (a-1)^2(3a-10)\leq 0$ luôn đúng

với $0<a<\sqrt{3}$ dấu bằng khi a=1

Tương tự $8b+\frac{5}{b}\geq\frac{3b^2+23}{2}$ (2) dấu bằng khi b = 1

$8c+\frac{5}{c}\geq\frac{3c^2+23}{2}$ (3) dấu bằng khi c = 1

Từ (1),(2),(3) suy ra $S=8(a+b+c)+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)+69}{2}=39$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1

Vậy GTNN của S = 39 đạt được khi và chỉ khi a = b = c = 1

Chú ý: để tìm ra vế phải của (1) ta sử dụng phương pháp tiếp tuyến.

Bài 4 : Với a, b, c là các số thực dương, nhỏ hơn $\frac{3}{4}$ và thỏa mãn a + b + c = 3, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(3b+3c-5)}+\frac{1}{b^2(3c+3a-5)}+\frac{1}{c^2(3a+3b-5)}\geq 3$$

Bài giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{1}{a^2(3(3-a)-5)}+\frac{1}{b^2(3(3-b)-5)}+\frac{1}{c^2(3(3-c)-5)}\geq a+b+c$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh khi ta có: $\frac{1}{a^2(4-3a)}\geq a$

Thật vậy, do $a<\frac{4}{3}$ nên bất đẳng thức trên tương đương với $1\geq a^3(4-3a)\Leftrightarrow 3a^4+1\geq 4a^3$

Từ a > 0 nên theo bất đẳng thức AM-GM ta nhận được $3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^4.a^4.a^4}=4a^3$

Dấu bằng xảy ra ⇔ a = 1

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra ⇔ a = b = c = 1.

Bài 5 : Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

Bài giải

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c+\sqrt{a(a+b+c)}}{b+c}+\frac{a+b+c+\sqrt{b(a+b+c)}}{c+a}+\frac{a+b+c+\sqrt{c(a+b+c)}}{a+b}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}}{\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}}+\frac{1+\sqrt{\frac{b}{a+b+c}}}{\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}}+\frac{1+\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}}{\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c};y=\frac{b}{a+b+c};z=\frac{c}{a+b+c}$, ta có x,y,z > 0 và x + y + z = 1

Khi đó đpcm $\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{x}}{y+z}+\frac{1+\sqrt{y}}{z+x}+\frac{1+\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{1+\sqrt{y}}{1-y}+\frac{1+\sqrt{z}}{1-z}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

Ta cm: $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq\frac{9}{2}(1)$ ta có $\Rightarrow\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq\frac{9}{(1-x)+(1-y)+(1-z)}=\frac{9}{2}$

Từ đó suy ra (1) đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Ta cm: $\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{y}}{1-y}+\frac{\sqrt{z}}{1-z}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}(2)$

Thật vậy, xét hàm số f(x)$=\sqrt{x}(1-x)$ với 0 < x < 1Ta có $f'(x)=\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Suy ra $0<f(x)<\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Vậy ta có: $\frac{\sqrt{x}}{1-x}=\frac{x}{(1-x)\sqrt{x}}\geq\frac{x}{\frac{2}{3\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}x}{2}$ tương tự $\frac{\sqrt{y}}{1-y}\geq\frac{3\sqrt{3}y}{2}$, $\frac{\sqrt{z}}{1-z}\geq\frac{3\sqrt{3}z}{2}$

Suy ra $\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{y}}{1-y}+\frac{\sqrt{z}}{1-z}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}(x+y+z)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra (2) đúng, dấu đẳng thức xảy ra kh x = y = z = $\frac{1}{3}$

Từ đó suy ra đpcm dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Bài 6: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $9(a^4+b^4+c^4)-25(a^2+b^2+c^2)+48=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$

Bài giải

$gt\Leftrightarrow 25(a^2+b^2+c^2)+48=9(a^4+b^4+c^4)$ kết hợp với đăng thức

$a^4+b^4+c^4\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$, từ đó suy ra:

$25(a^2+b^2+c^2)+48 \ge 3(a^2+b^2+c^2)^2 \Leftrightarrow 3 \le a^2+b^2+c^2 \le \frac{16}{3}$

Ta có $14x+2 \ge 25x^2-9x^4\ (*), \forall x>0, "=" \Leftrightarrow x=1$ thật vậy

$(*) \Leftrightarrow 9x^4-25x^2+14x+2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(9x^2+18x+2) \ge 0$ luôn đúng. Vậy

$$\begin{cases} 14a+2 \ge 25a^2-9a^4 \\ 14b+2 \ge 25b^2-9b^4 \\ 14c+2 \ge 25c^2-9c^4 \end{cases} \Rightarrow 14(a+b+c)+6 \ge 25\left(a^2+b^2+c^2\right)-9\left(a^4+b^4+c^4\right)=48$$

$\Rightarrow a+b+c \ge 3$, dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawrz ta được:

$$P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{3} \ge 1$$

Dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 7: Cho 3 số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.Tìm GTLN của $P=\frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2}+\frac{11c^3-b^3}{bc+4c^2}+\frac{11a^3-c^3}{ca+4a^2}$

Bài giải

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau : $\frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2} \le 3b-a$

Thật vậy : $\frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2} \le 3b-a \Leftrightarrow a^3+b^3 \ge ab(a+b) \Rightarrow \frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2} \le 3b-a$

$$\Rightarrow P=\frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2}+\frac{11c^3-b^3}{bc+4c^2}+\frac{11a^3-c^3}{ca+4a^2} \le 3b-a+3c-b+3a-c=2(a+b+c)=6$$

Bài 8: Cho ba số thực dương a,b,c và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}$.

Bài giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT : $\frac{x^3+1}{x+2} \ge \frac{7}{18}x^2+\frac{5}{18} (x>0)\ (*)$

$(*) \Leftrightarrow 18(x^3+1) \ge (x+2)\left(7x^2+5\right) \Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8) \ge 0$ đúng với mọi x>0, dấu "=" sảy ra khi x=1

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a^3+b^3}{a+2b} \ge \frac{7a^2}{18}+\frac{5b^2}{18};\ \frac{b^3+c^3}{b+2c} \ge \frac{7b^2}{18}+\frac{5c^2}{18};\ \frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge \frac{7c^2}{18}+\frac{5a^2}{18};$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \ge \frac{12\left(a^2+b^2+c^2\right)}{18}=2$

Vậy MinS =2 khi a=b=c=1

Bài 9 : Cho *a*, *b*, *c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Bài giải

Không giảm tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a,b,c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right)\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le 9$$

Với $f(x)=\frac{4}{1-x}-\frac{1}{x}=\frac{5x-1}{x-x^2},x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Ta đánh giá $\frac{5x-1}{x-x^2}\le 18x-3\Leftrightarrow(3x-1)^2(2x-1)\le 0,\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le 18(a+b+c)-9=9$

Bài 10: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{3}a}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{3}b}{c^2+a^2}+\frac{\sqrt{3}c}{a^2+b^2}$.

Bài giải

Từ giả thiết $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=4\\a,b,c>0\end{cases}\Rightarrow a,b,c\in(0;2)$ và $a^2+b^2+c^2=4\Leftrightarrow b^2+c^2=4-a^2\ldots$

Do đó $P=\frac{\sqrt{3}a}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{3}b}{c^2+a^2}+\frac{\sqrt{3}c}{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}a}{4-a^2}+\frac{\sqrt{3}b}{4-b^2}+\frac{\sqrt{3}c}{4-c^2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4a-a^3}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4b-b^3}+\frac{\sqrt{3}c^2}{4c-c^3}$

Xét hàm số $f(x)=4x-x^3$ với $x\in(0;2)$. Có $f'(x)=4-3x^2\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pm2\sqrt{3}}{3}, f(0)=0, f(2)=0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;2)$ là

$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=4\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{16\sqrt{3}}{9}$. Từ bảng biến thiên ta có $0<f(x)\le\frac{16\sqrt{3}}{9},\forall x\in(0;2)$.

Tức $0<4x-x^3\le\frac{16\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\frac{1}{4x-x^3}\ge\frac{9}{16\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}x^2}{4x-x^3}\ge\frac{9\sqrt{3}x^2}{16\sqrt{3}},\forall x\in(0;2)$.Dấu "=" khi $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng ta có $\frac{\sqrt{3}a^2}{4a-a^3}\ge\frac{9\sqrt{3}a^2}{16\sqrt{3}}=\frac{9a^2}{16};\frac{\sqrt{3}b^2}{4b-b^3}\ge\frac{9\sqrt{3}b^2}{16\sqrt{3}}=\frac{9b^2}{16};\frac{\sqrt{3}c^2}{4c-c^3}\ge\frac{9\sqrt{3}c^2}{16\sqrt{3}}=\frac{9c^2}{16},(a,b,c\in(0;2))$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được $P\ge\frac{9a^2}{16}+\frac{9b^2}{16}+\frac{9c^2}{16}=\frac{9}{16}(a^2+b^2+c^2)=\frac{9}{4}$.

Và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min P=\dfrac{9}{4}$ đạt được, khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11: Cho *a*, *b*, *c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(a+b+c)\left(\dfrac{3a-b}{a^2+ab}+\dfrac{3b-c}{b^2+bc}+\dfrac{3c-a}{c^2+ca}\right)$.

Bài giải

Giả sử $a+b+c=k>0$, đặt $a=kx, b=ky, c=kz \Rightarrow x,y,z>0$ và $x+y+z=1$.

Khi đó $P=k\left[\dfrac{k(3x-y)}{k^2(x^2+xy)}+\dfrac{k(3y-z)}{k^2(y^2+yz)}+\dfrac{k(3z-x)}{k^2(z^2+zx)}\right]=\dfrac{3x-y}{x^2+xy}+\dfrac{3y-z}{y^2+yz}+\dfrac{3z-x}{z^2+zx}$

$=\dfrac{4x-(x+y)}{x(x+y)}+\dfrac{4y-(y+z)}{y(y+z)}+\dfrac{4z-(z+x)}{z(z+x)}=\dfrac{4}{x+y}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y+z}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z+x}-\dfrac{1}{z}$

$=\dfrac{4}{1-z}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{1-y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{5x-1}{x-x^2}+\dfrac{5y-1}{y-y^2}+\dfrac{5z-1}{z-z^2}$.

Do *a*, *b*, *c* là ba cạnh của một tam giác nên $b+c>a \Rightarrow y+z>x \Rightarrow 1-x>x$

$\Rightarrow x<\dfrac{1}{2}$, tức là $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Tương tự ta cũng có $y,z\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{5t-1}{t-t^2}\le 18t-3$ (*) đúng với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow \dfrac{5t-1}{t-t^2}-18t+3\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{18t^3-21t^2+8t-1}{t-t^2}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2t-1)(3t-1)^2}{t(1-t)}\le 0$ (**)

(**) hiển nhiên đúng với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Do đó (*) đúng với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Áp dụng (*) ta được $P\le 18x-3+18y-3+18z-3=18(x+y+z)-9=9$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy *P* đạt giá trị lớn nhất bằng 9 khi $a=b=c$.

Bài 12: Cho các số thực dương *a*, *b*, *c* thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=3(a+b+c)+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Bài giải

Ta chứng minh $3a+\dfrac{2}{a}\ge\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{9}{2}$

Với $0<a<\sqrt{3}\Rightarrow a^3-6a^2+9a-4\le 0\Leftrightarrow (a-1)^2(a-4)\le 0$ (đúng)

Tương tự $3b+\dfrac{2}{b}\ge\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{9}{2}; 3c+\dfrac{2}{c}\ge\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{9}{2}$

Vậy $3(a+b+c)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{27}{2}=15$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 13 : Cho ba số thực dương a,b,c và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}$

Bài giải

Trước tiên ta phải chứng minh BĐT $\frac{x^3+1}{x+2}\geq\frac{7}{18}x^2+\frac{5}{18}(x>0)(*)$

$(*)\Leftrightarrow 18\left(x^3+1\right)\geq(x+2)\left(7x^2+5\right)\Leftrightarrow(x-1)^2(11x+8)\geq 0$

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a}$

$\frac{a^3+b^3}{a+2b}\geq\frac{7a^2}{18}+\frac{5b^2}{18};\frac{b^3+c^3}{b+2c}\geq\frac{7b^2}{18}+\frac{5c^2}{18};\frac{c^3+a^3}{c+2a}\geq\frac{7c^2}{18}+\frac{5a^2}{18}$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S\geq\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{18}=2$

Vậy $MinS=2$ khi $a=b=c=1$

Bài 14: Với a, b, c là các số thực dương, nhỏ hơn và thỏa mãn a+b+c=3, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2(3b+3c-5)}+\frac{1}{b^2(3c+3a-5)}+\frac{1}{c^2(3a+3b-5)}\geq 3$$

Bài giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{1}{a^2\left(3(3-a)-5\right)}+\frac{1}{b^2\left(3(3-b)-5\right)}+\frac{1}{c\left(3(3-c)-5\right)}\geq a+b+c$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh khi ta co $\frac{1}{a^2(4-3a)}\geq a$

Thật vậy, do $a<\frac{4}{3}$ nên bất đẳng thức trên tương đương với $1\geq a^3(4-3a)\Leftrightarrow 3a^4+1\geq 4a^3$

Từ a > 0 nên theo bất đẳng thức AM-GM ta nhận được $3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^4\times a^4\times a^4}=4a^3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=1$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

§8: BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{4}{a+b-c}$. Tìm GTNN của $P=\left(a^5+b^5+c^5\right)\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}\right)$

Bài giải

Từ giả thiết ta có

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=4 \Leftrightarrow 4=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\left(\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\le 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\sqrt{(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2}-1\ge 0 \Leftrightarrow t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 7$$

Biểu thức

$$P=3+\frac{a^5+b^5}{c^5}+c^5\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}\right)+\frac{a^5}{b^5}+\frac{b^5}{a^5}\ge 3+2\sqrt{(a^5+b^5)\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}\right)}+\frac{a^5}{b^5}+\frac{b^5}{a^5}=3+2\sqrt{2\frac{a^5}{b^5}+\frac{b^5}{c^5}}+\frac{a^5}{b^5}+\frac{b^5}{a^5}$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 7$ thì ta có $\frac{a^5}{b^5}+\frac{b^5}{a^5}=t^5-3t^3+5t\ge 15127\forall t\ge 7\Rightarrow P\ge 15376$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}b=c\sqrt{\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}}$

Bài 2 : Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm GTLN của biểu thức : $P=\frac{ab}{c^2+3}+\frac{bc}{a^2+3}-\frac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$

Bài giải

Ta có $\frac{ab}{c^2+3}+\frac{bc}{a^2+3}=\frac{ab}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)}+\frac{bc}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)}$

$$\le \frac{ab}{2\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}+\frac{bc}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}\le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{b^2}{c^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\le \frac{1}{4}\left(1+\frac{b^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ab}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{b}{2c}+\frac{b}{2a}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)$$

Lại có $(x^3+y^3)(x+y)\ge (x^2+y^2)^2\ge \frac{(x+y)^4}{4}\Rightarrow x^3+y^3\ge \frac{(x+y)^3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^3b^3+b^3c^3}{a^3c^3}\ge \frac{(ab+bc)^3}{4c^3a^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)^3 \Leftarrow P\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{96}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)^3$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}+\frac{t}{8}-\frac{t^3}{96}$ với $t>0 \Rightarrow f(t)_{max}=f(2)=\frac{5}{12}$

Vậy $P_{max}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 3: Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-\frac{x^3y^3+y^3z^3}{24x^3z^3}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}=\frac{xy}{\left(z^2+x^2\right)+\left(z^2+y^2\right)}+\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+z^2\right)}$$

$$\le \frac{xy}{2\sqrt{\left(z^2+x^2\right)\left(z^2+y^2\right)}}+\frac{yz}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{z^2+x^2}+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{2yz}+\frac{y^2}{2xy}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{y}{2z}+\frac{y}{2x}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $x^3y^3+y^3z^3 \ge \frac{1}{4}(xy+yz)^3$ nên

$\frac{x^3y^3+y^3z^3}{z^3x^3} \ge \frac{(xy+yz)^3}{4z^3x^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3$ Suy ra $P \le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{96}\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\right)^3$

Đặt $t=\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$, khi đó $t>0$ và $P \le -\frac{1}{96}t^3+\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}$.Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{96}t^3+\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=-\frac{1}{32}t^2+\frac{1}{8}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$, vì $t>0$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \le \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi t = 2 hay $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{12}$, đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4: Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+z \le 2y$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)$.

Bài giải

Từ giả thuyết ta có $\sqrt{xz} \le y$.

Chú ý rằng, với mọi x, y > 0 và mọi a, b ta có $\frac{(a+b)^2}{x+y} \le \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$. (1)

Thật vậy, (1) tương đương với $(ay-bx)^2 \ge 0$.

Khi đó $P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right) \le \frac{(x+y)^2}{4(1+z^2)}+\frac{(y+z)^2}{4(1+x^2)}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)$

$$\le \frac{(x+y)^2}{4(x^2+z^2+y^2+z^2)}+\frac{(y+z)^2}{4(x^2+y^2+x^2+z^2)}-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)-y^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)-\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}\right)$$

$$\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)\left(\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^2-3\frac{y^2}{xz}\right)$$

$$\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3+3\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{xz}$$

$$\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3+3\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right).\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{4}.$$

Đặt $t=\frac{y}{z}+\frac{y}{x}$, $t\ge 2\sqrt{\frac{y^2}{xz}}=2$. Khi đó $P\le -\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{4}$ với $t\ge 2$. Ta có $f'(t)=-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{8}t<0$ với mọi $t\ge 2$.

Suy ra $\max\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=-\frac{3}{2}$.

Suy ra $P\le -\frac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $-\frac{3}{2}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

<u>Bài 5 :</u> cho các số thực dương a,b,c sao cho $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=10$ .Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{3}{ab+bc+ca}-\frac{4}{a^3+b^3+c^3}$$

(Trích đề thầy Trần Quốc Luật)

<u>Lời giải:</u>

Chú ý từ giả thiết ta có:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=10abc\Rightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=7abc=\frac{7(a+b+c)(ab+bc+ca)}{10}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ ta có :

$$10=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b+c}\right)$$

$\Rightarrow 10a(b+c)\ge (a+b+c)(4a+b+c)\Leftrightarrow (a-b-c)(4a-b-c)\le 0\Leftrightarrow a\le b+c$ từ đây suy ra:

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\ge 0\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge a^3+b^3+c^3+2abc$ (*)

$\Leftrightarrow 4\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+abc\right]\ge (a+b+c)^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{16(a+b+c)(ab+bc+ca)}{5}\ge (a+b+c)^3 \Leftrightarrow ab+bc+ca\ge \dfrac{5(a+b+c)^2}{16}$

Mặt khác ta có $(*)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\le 5abc=\dfrac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2}\le \dfrac{5(a+b+c)^3}{32}$

Từ các đánh giá trên ta có $P\le \dfrac{48}{5(a+b+c)^2}-\dfrac{128}{5(a+b+c)^3}\le \dfrac{1}{5}$ (dễ dàng chứng minh) Max $P=\dfrac{1}{5}.khi:(a,b,c)=(2;1;1)$ và hoán vị

Bài 6: Cho các số thực dương x,y,z sao cho $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{16}{x+y+z}$ Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$

(Trích đề thi thử sở Hà Tĩnh)

Bài giải

Bài này tính cả cách của mình thì có khoảng 7 lời giải nhưng có 4 lời giải có vẻ na ná giống nhau vì thế xin chỉ nêu các cách điển hình :

chú ý các đẳng thức sau:

$16=(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}\right)+3$ và :

$P=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}=\dfrac{(x^2z+y^2x+z^2y)-(x^2y+y^2z+z^2x)}{xyz}=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)-\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}\right)$

Bây giờ đặt $A=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right);B\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}\right)$ thì A+B=13 và cần tìm max của P=A-B

Áp dụng BĐT am-gm :$16^2=\left[x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\right]\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+2\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)\right]$

$\ge 4\sqrt{2(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2).2\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$=8\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right).(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)}=32\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$(x^2+y^2+z^2)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)\le 64\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}\right)+\left(\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{z^2}{y^2}\right)\le 61$

$\Leftrightarrow A^2-2B+B^2-2A\le 61\Leftrightarrow (A+B)^2-2AB-2(A+B)\le 61\Leftrightarrow AB\ge 41$ ta có :

$P^2=(A-B)^2=(A+B)^2-4AB\le 169-4.41=5\Rightarrow P\le \sqrt{5}$ đẳng thức có thể xảy ra khi :

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx) \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2xyz(x+y+z) \\ (x-y)(y-z)(z-x)>0 \end{cases}$ chẳng hạn như $\begin{cases} \sqrt{z}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \\ \sqrt{yz}=\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z}) \\ z\ge y\ge x \end{cases}$

§8: BẤT ĐẲNG THỨC CÓ BIÊN BẰNG 0

Bài 1: Cho các số thực x ; y ; z không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\right)$

Bài giải

Giả sử z = min(x;y;z). Khi đó ta có: $x+y\ge 2z \Leftrightarrow xy+yz+zx\ge\left(x+\frac{z}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right)$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{y^2+z^2}\ge\frac{1}{\left(y+\frac{z}{2}\right)^2};\frac{1}{x^2+z^2}\ge\frac{1}{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow P\ge\left(x+\frac{z}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right)\left[\frac{1}{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2}\right]$$

Đặt $a=x+\frac{z}{2};b=y+\frac{z}{2}$ (a > 0, b > 0 theo gt cho)

Ta có : $P\ge ab\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\left[\frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}\right]+\frac{a}{b}+\frac{1}{\frac{a}{b}}$

Đặt $t=\frac{a}{b}$ (t > 0) ta khảo sát hàm số:

$f(t)=\frac{t}{t^2+1}+t+\frac{1}{t}$ (với t > 0)

$f'(t)=\frac{t^2+1-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}+1-\frac{1}{t^2}=\frac{-(t^2-1)}{(t^2+1)^2}+\frac{(t^2-1)}{t^2}$

$=(t^2-1)\left[\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t^2+1)}\right]=0\Leftrightarrow t=1(t>0)$

Bài 2: Cho a; b; c là các số thực không âm đôi một khác nhau. Tìm Min

$P=\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]$

Bài giải

Giả sử $c=\min(a;b;c)\Rightarrow a-c\le a;b-c\le b\Rightarrow P\ge\left[(a+b)^2+a^2+b^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]$

$$=\frac{2(a^2+b^2+ab)}{a^2-2ab+b^2}+\frac{2(a^2+ab+b^2)}{a^2}+\frac{2(a^2+ab+b^2)}{b^2}$$

$$=2\left[\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]=f(t)=2\left[\frac{t+1}{t-2}+t^2+t\right)$$ với $P=\frac{x^2(y+z)}{yz}$ $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

$$f^{/}(t)=\frac{-3}{(t-2)^2}+2t+1=0\Rightarrow t=\frac{5+\sqrt{33}}{4}$$

Lập bảng biến thiên ta có ngay $\min f(t)=\frac{59+11\sqrt{33}}{8}$

$\Rightarrow P\ge\frac{59+11\sqrt{33}}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ c = 0; $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ và các hoán vị của chúng.

Bài 3: Cho a,b,c là các số không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2a^2+b^2+c^2}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}+\frac{a+b+c}{(a+b)c}+2\sqrt{a+b+c}$$

Bài giải

Ta có $P=\frac{2a^2+b^2+c^2}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}+\frac{a+b+c}{(a+b)c}+2\sqrt{a+b+c}=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}+2\sqrt{a+b+c}$

Vì $0\le a<b\le c$ nên $a^2+b^2\le ab+b^2\le\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi a = 0

Tương tự: $a^2+c^2\le\left(\frac{a}{2}+c\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi a = 0

Nên : $P\ge\frac{1}{\left(\frac{a}{2}+b\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}+c\right)^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}+2\sqrt{a+b+c}$ dấu bằng xảy ra khi a = 0

Áp dụng các bất đẳng thức : với x > 0, y > 0 ta có:

- $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$ dấu bằng xảy ra khi x = y. (phải chứng minh)
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi x = y.

Ta có: $P\ge\frac{8}{(a+b+c)^2}+\frac{4}{a+b+c}+2\sqrt{a+b+c}$

Đặt $t=2\sqrt{a+b+c}$ với t > 0

Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t^4}+\frac{4}{t^2}+2t$ với t > 0

Ta có: $f^{/}(t)=-\frac{32}{t^5}-\frac{8}{t^3}+2=\frac{2t^5-8t^2-32}{t^5}$

$f^{/}(t)=0\Leftrightarrow 2t^5-8t^2-32=0\Leftrightarrow 2(t-2)(t^4+2t^2+4t+8)=0\Leftrightarrow t=2$

Bài 4: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{1+2a^2}+\sqrt{1+2b^2}+\sqrt{1+2c^2}=5$

Chứng minh rằng: $4\sqrt{2}a^3+b^6+c^6\le 64$

Bài giải

Áp dụng (1) ta có

$5=\sqrt{1+2a^2}+\sqrt{1+2b^2}+\sqrt{1+2c^2}\ge 1+\sqrt{1+2a^2+2b^2}+\sqrt{1+2c^2}\ge 2+\sqrt{1+2a^2+2b^2+2c^2}$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\le 4$ hay $b^2+c^2\le 4-a^2$ (2)

Khi đó $4\sqrt{2}a^3+b^6+c^6\le 4\sqrt{2}a^3+(b^2+c^2)^3$

Từ (2) và do a, b, c không âm ta có $0\le a\le 2$

Xét hàm số $f(a)=4\sqrt{2}a^3+(4-a^2)^3$ trên [0;2]. Ta có:

$f^{/}(a)=12\sqrt{2}a^2-6a(4-a^2)^2=6a(a-\sqrt{2})[a(6-a^2)+\sqrt{2}(8-a^2)]$

Với $a\in[0;2]$, $f^{/}(a)=0\Leftrightarrow a=0; a=\sqrt{2}$

Có f(0) = 64 ; $f(\sqrt{2})=24; f(2)=32\sqrt{2}\Rightarrow f(a)\le 64$; với $\forall a\in[0;2]$

Vậy $4\sqrt{2}a^3+b^6+c^6\le 64$. Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = 0, c = 2 hoặc a = c = 0 , b = 2.

Bài 5 : Với các số thực: $0\le a,b,c\le 2$ thỏa mãn a + b + c = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1+c}$

Bài giải

Ta chứng minh : $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}(*)$. Thật vậy:

$(*)\Leftrightarrow 1+a+1+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+1+a+b+2\sqrt{1+a+b}$

$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)\ge 1+a+b\Leftrightarrow ab\ge 0$ (luôn đúng)

Vì vai trò của a,b,c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $a\le b\le c$

Suy ra : $1\le c\le 2$. Theo (*) ta có: $P\ge 1+\sqrt{1+a+b}+\sqrt{1+c}=1+\sqrt{4-c}+\sqrt{1+c}$

Xét hàm: $f(c)=1+\sqrt{4-c}+\sqrt{1+c}; 1\le c\le 2$

Ta có $f^{/}(c)=-\frac{1}{2\sqrt{4-c}}+\frac{1}{2\sqrt{1+c}}; f^{/}(c)=0\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}$

Ta có: $f(1)=f(2)=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}; f\left(\frac{3}{2}\right)=1+\sqrt{10}$. Vậy : $P\ge 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Vậy GTNN của P là: $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Bài 6 : Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm min của

$P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}+\frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1)$

Bài giải

Giả sử $z=\min\{x,y,z\}$. Đặt $x+\frac{z}{2}=u\ge 0, y+\frac{z}{2}=v\ge 0$ khi đó ta có:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+z^2\le\left(x+\frac{z}{2}\right)^2=u^2, y^2+z^2\le\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=v^2 \\ x^2+y^2\le\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=u^2+v^2 \end{array}\right| \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\ge\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{2uv}+\frac{6}{(u+v)^2}\ge\frac{4}{(u+v)^2}+\frac{6}{(u+v)^2}=\frac{10}{(x+y+z)^2}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1=xyz+x+y+z+2\ge x+y+z+2$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{10}{(x+y+z)^2}+\frac{5}{2}(x+y+z)+5$$

Các BĐT phụ đã dùng $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\ge\frac{1}{2uv}$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{8}{(a+b)^2}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Bài 7 : Cho các số thực không âm a, y, z biết x = min{x,y,z}. tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{32(x+\sqrt{yz})^2}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2+4\left[(y+\sqrt{xz})(z+\sqrt{xy})+1\right]}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$$

Bài giải

Ta có các đánh giá sau:

$(y+\sqrt{zx})(z+\sqrt{xy})\ge(x+\sqrt{yz})^2\Leftrightarrow yz+z\sqrt{zx}+y\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}\ge x^2+2x\sqrt{yz}+yz$

$\Leftrightarrow x(z\sqrt{z}+y\sqrt{y}-\sqrt{xyz}-x\sqrt{x})\ge 0$ (đúng với x = min{x;y;z})

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ge 4(x+\sqrt{yz})\Leftrightarrow x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\ge 4(x+\sqrt{yz})$

$\Leftrightarrow(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+\sqrt{x}(2\sqrt{y}+2\sqrt{z}-3\sqrt{x})\ge 0$ (đúng với x = min{x;y;z})

$x(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ge 0$

Nên : $P\le\frac{32(x+\sqrt{yz})^2}{4(x+\sqrt{yz})^2+4}-4(x+\sqrt{yz})=\frac{8(x+\sqrt{yz})^2}{(x+\sqrt{yz})^2+1}-4(x+\sqrt{yz})$

Đặt $x+\sqrt{yz}=t(t\ge 0)$. Ta có:

$$f(t)=\frac{8t^2}{t^2+1}-4t. f'(t)=\frac{16t}{(t^2+1)^2}-4=0\Leftrightarrow(t-1)(t^3-t^2+3t-1)=0$$

Phương trình có nghiệm t = 1 và nghiệm lượng giác a

Với $t\ge 1$ thì $f'(t)\ge 0$. Hàm đồng biến nên ta chỉ xét P trong khoảng [0;1]

Ta tính $f(0).f(1).f(a)$ và có $f(0)=f(1)=0>f(a)$

Nên $MaxP = Maxf(t) = f(0) = f(1) = 0$ .. dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = 0; y = z = 1 \end{cases}$

Bài 8: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 8\left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right)$

(Trích đề thi thử trường chuyên Vinh lần 2)

Bài giải

Giả sử y nằm giữa x và z

$\Rightarrow x(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow x^2y + xyz \geq xy^2 + x^2z \Leftrightarrow x^2y + 2xyz + z^2y \geq xy^2 + x^2z + z^2y + xyz \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$

$\Rightarrow P \leq x^3 + y^3 + z^3 + 8y(x+z)^2$. Lại có $x^3 + z^3 \leq (x+z)^3 = (4-y)^3$ (do $z \geq 0$)

$\Rightarrow P \leq (4-y)^3 + y^3 + 8y(4-y)^2 = f(y) \leq f(1) = 100$

$\Rightarrow P_{max} = 100$ tại $(x, y, z) = (3,1,0)$

Bài 9 : Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 - 4x^2 - 5y^2 + 1 = 0$

Tìm GTNN,GTLN của $P = \dfrac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

Bài giải

Từ điều kiện $\Rightarrow y^2 - 3x^2y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq 1$

Vậy $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 - 3x^2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Ta có $\dfrac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2y^2}{3} = (x^2 + y^2 + 1)^2 - \dfrac{13}{3}(x^2 + y^2) - \dfrac{1}{3}$

Với $y^2 > 2 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 1)^2 - \dfrac{13}{3}(x^2 + y^2) - \dfrac{1}{3} > 0 \Rightarrow P > \dfrac{4}{3}$ (Vô lí với $P_{\min} = 1$)

$\Rightarrow y^2 \leq 2 \Rightarrow P = \dfrac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} \leq \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{2y^2 - 4}{y^2 + 1} \leq \dfrac{4}{3}$

Vậy $P_{max} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$

Bài 10 : Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm GTLN của biểu thức : $P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - xz + x^2)$

Bài giải

Giả sử $3 \geq x \geq y \geq z \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(z-x)\le 0 \\ z(z-y)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-zx+x^2\le x^2 \\ z^2-zy+y^2\le y^2 \end{cases} \Rightarrow P\le x^2y^2(x^2-xy+y^2)=x^2y^2(x+y)^2-3x^3y^3\le 9x^2y^2-3x^3y^3$$

Xét hàm số $f(t)=9t^2-3t^3$ với $t\in\left[0;\frac{9}{4}\right]\Rightarrow f(t)_{max}=f(2)=12$

Vậy $P_{max}=12$ tại $(x;y;z)=(2;1;0)$

Bài 11 : Cho các số thực x,y thỏa mãn $(x^2+y^2+1)^2+3x^2y^2-4x^2-5y^2+1=0$

Tìm GTNN,GTLN của $P=\dfrac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}$

Bài giải

Từ điều kiện $\Rightarrow y^2-3x^2y^2-1=(x^2+y^2-1)^2\ge 0\Rightarrow P\ge 1$

Vậy $P_{\min}=1\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2-3x^2y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases}$

$$P=\frac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2y^2-x^2-4-9x^2y^2}{x^2+y^2+1}$$

Ta có $\dfrac{2y^2-x^2-4-9x^2y^2}{3}=(x^2+y^2+1)^2-\dfrac{13}{3}(x^2+y^2)-\dfrac{1}{3}$

Với $y^2>2\Rightarrow x^2+y^2>2\Rightarrow (x^2+y^2+1)^2-\dfrac{13}{3}(x^2+y^2)-\dfrac{1}{3}>0\Rightarrow P>\dfrac{4}{3}$ (Vô lí với $P_{\min}=1$)

$$\Rightarrow y^2\le 2\Rightarrow P=\frac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2y^2-x^2-4-9x^2y^2}{x^2+y^2+1}\le\frac{4}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2y^2-4}{y^2+1}\le\frac{4}{3}$$

Vậy $P_{max}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=2 \end{cases}$

Bài 12 : Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$

Tìm GTLN của biểu thức : $P=(x^2-xy+y^2)(y^2-yz+z^2)(z^2-xz+x^2)$

Bài giải

Giả sử $3\ge x\ge y\ge z\ge 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(z-x)\le 0 \\ z(z-y)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-zx+x^2\le x^2 \\ z^2-zy+y^2\le y^2 \end{cases} \Rightarrow P\le x^2y^2(x^2-xy+y^2)=x^2y^2(x+y)^2-3x^3y^3\le 9x^2y^2-3x^3y^3$$

Xét hàm số $f(t)=9t^2-3t^3$ với $t\in\left[0;\frac{9}{4}\right]\Rightarrow f(t)_{max}=f(2)=12$

Vậy $P_{max}=12$ tại $(x;y;z)=(2;1;0)$

Câu 13: Cho các số thực không âm x,y,z xthỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xy+yz+zx\right)+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\Rightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq(x+y+z)^2$

$$P\geq 3\frac{(xy+yz+zx)^2}{3}+3(xy+yz+zx)+2\sqrt{1-2(xy+yz+zx)}$$

$$\Rightarrow P\geq(xy+yz+zx)^2+3(xy+yz+zx)+2\sqrt{1-2(xy+yz+zx)}$$

Đặt $t=xy+yz+zx\,(t\geq 0)$. Do $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$

Nên $1=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+xz)=3t\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Xét hàm $f(t)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}\Rightarrow f'(t)=2t+3-\frac{2}{\sqrt{1-2t}}>0,\forall t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

$\Rightarrow f(t)_{\min}=2\rightarrow P_{\min}=2\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

Câu 14 : Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $4\left(x^3+8y^6\right)=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\left(x+2y^2+2\right)^3}{5\left(x^2+y^2\right)-5(x+y)+3}$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức phụ $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ ta được

$$x^3+8y^6\geq 2xy^2\left(x+2y^2\right)\Rightarrow\left(x^3+8y^6\right)\geq\left(x+2y^2\right)^3\Leftrightarrow 1\geq\left(x+2y^2\right)^3\leftrightarrow 1\geq x+2y^2$$

Do đó: $\left(x+2y^2+2\right)^3\leq(1+2)^3=27$ (1)

Lại có: $5\left(x^2+y^2\right)-5(x+y)+3\geq\frac{5}{2}(x+y)^2-5(x+y)+3=\frac{5}{2}\left[(x+y)^2-2(x+y)+1\right]+\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1), (2) → $P\leq\frac{27}{\frac{1}{2}}=54$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=2y^2\\x+y=1\\4\left(x^3+8y^6\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

Vậy Max P = 54 khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 15: Cho các số không âm a,b,c và $b>0$; $\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b+2c}=4\sqrt{b}$ .tìm max $P=\frac{a\sqrt{b}}{b+c}+\frac{c}{a\sqrt{b}+2b}$

Lời giải

Đặt $y=\frac{c}{b};x=\frac{a}{\sqrt{b}}$ ta có $GT\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1+2y}=4$ và cần tìm max $P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+2}$

chú ý $4=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1+2y}\ge\sqrt{x^2+1}+1\to x\le2\sqrt{2}$ và tương tự $y\le4$ lúc này ta có

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+2}-2\sqrt{2}=\frac{x-2\sqrt{2}}{y+1}-\frac{y(4\sqrt{2}-y-1+2\sqrt{2}x)}{(x+2)(y+1)}\le0\Leftrightarrow P\le2\sqrt{2}.$$

max $P=2\sqrt{2}$ khi $(x,y)=(2\sqrt{2};0)$

Bài 16 : Cho các số không âm x,y,z sao cho $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=6$ tìm max của

P= $\frac{(x+y+z)^2}{6+z}-\frac{(xy+yz+zx)^2}{24}$.

Bài giải

Giải: ta có $6=(x+y)^2+2z(x+y+z)+x^2+y^2\ge\frac{3(x+y)^2}{2}+2z(x+y)+\frac{2z^2}{3}=\frac{(3x+3y+2z)^2}{6}$

$\Rightarrow 3x+3y+2z\le6\Leftrightarrow3(x+y+z)\le z+6$ từ đó suy ra

$P\le\frac{(x+y+z)}{3}-\frac{(xy+yz+zx)^2}{24}\le\frac{(x+y+z)^2}{12}+\frac{1}{3}-\frac{(xy+yz+zx)^2}{24}=\frac{15}{24}-\frac{(xy+yz+zx-1)^2}{24}\le\frac{15}{24}$ maxP=15/24

khi(x,y,z)=(1,1,0)

Bài 17: Cho các số thực không âm a,b,c sao cho $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$P=(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$

Bài giải

Không mất tính tổng giả sử $a\ge b\ge c$. thế thì :

$a^2+ac+c^2\le a^2+ac+\frac{c(a+c)}{2}=(a+c)\left(a+\frac{c}{2}\right)$ và $b^2+bc+c^2\le b^2+bc+\frac{c(b+c)}{2}=(b+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$

$$\Rightarrow\prod_{a,b,c}(a^2+ab+b^2)\le(a+c)(b+c)(a^2+ab+b^2)(a+\frac{c}{2})(b+\frac{c}{2})\le(a+c)(b+c)(a^2+ab+b^2)$$

Lưu ý $3(a+c)(b+c)+(a^2+ab+b^2)=\frac{3(a+b+c)^2}{2}+\frac{3c^2-(a-b)^2}{2}$ ta có:

$$4.3(a+c)(b+c).(a^2+ab+b^2)=\left[3(a+c)(b+c)+(a^2+ab+b^2)\right]^2-\left[3c(a+b)+3c^2-(a-b)\right]^2$$

$$=\left[6+\frac{3c^2-(a-b)^2}{2}\right]^2-\left[3c^2-(a-b)^2+3c(a+b)\right]^2$$

$$=36+6(1-c)^2\left(3c^2-(a-b)^2\right)-9c^2(a+b)^2-\frac{3\left[3c^2-(a-b)^2\right]^2}{4}$$

$\le36+18c^2(1-c)^2-9c^2(2-c)^2=36-9c^2(2-c^2)\le36$.từ đó $P\le3$ dấu= khi(a,b,c)=(1,1,0) và hoán vị

Bài 18: Cho các số $x,y,z\in[0;2]$ không đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của :

$$P=x^2+y^2+z^2+6(xy+yz+zx)+\frac{96}{3\sqrt[3]{x^3+y^3}+2z}$$

Bài giải

Chú ý $3\sqrt[3]{x^3+y^3}+2z\le 3(x+y)+2z\le 3(x+y+z)$ từ đây ta có

$$P\ge (x+y+z)^2+4(xy+yz+zx)+\frac{32}{x+y+z}$$

Nếu $x+y+z\le 2$ dễ có $P\ge (x+y+z)^2+\dfrac{32}{x+y+z}\ge 20$

Nếu $x+y+z\ge 2$ từ $xyz+(2-x)(2-y)(2-z)\ge 0\Rightarrow xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)-4$ từ đó :

$P\ge (x+y+z)^2+8(x+y+z)+\dfrac{32}{x+y+z}-16\ge 4+32-16=20$ minP=20 chẳng hạn x=2;y=z=0

Bài 19: cho các số thực không âm $x,y,z\in[0,2]$ và $x+y+z=3$ tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2}+\frac{1}{z^2+x^2+2}+\sqrt{xy+yz+zx}$$

Bài giải

Không mất tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$ suy ra $2\ge x\ge 1$ và $y+z\ge 1\to xy>0$ ta có

$\dfrac{1}{x^2+y^2+2}\ge\dfrac{1}{x^2+(y+z)^2+2};\ \dfrac{1}{y^2+z^2+2}\ge\dfrac{1}{(y+z)^2+2}$ mặt khác

$\sqrt{xy+yz+zx}-\sqrt{x(y+z)}=\dfrac{yz}{\sqrt{xy+yz+zx}+\sqrt{x(y+z)}}\ge\dfrac{z^2}{2\sqrt{3}}\ge\dfrac{z^2}{(x^2+2)(x^2+z^2+2)}$ nên:

$$\sqrt{xy+yz+zx}+\frac{1}{x^2+z^2+2}\ge\sqrt{x(y+z)}+\frac{1}{x^2+z^2+2}+\frac{z^2}{(x^2+2)(x^2+z^2+2)}=\sqrt{x(y+z)}+\frac{1}{x^2+2}$$

thay $y+z=3-x$ và kết hợp các đánh giá trên ta quy về

$P\ge f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}+\dfrac{1}{2x^2-6x+11}+\dfrac{1}{x^2-6x+11}+\sqrt{x(3-x)}$ với $x\in[1;2]$ chú ý rằng

$\dfrac{1}{2x^2-6x+11}=\dfrac{1}{2(x-1)(x-2)+7}\ge\dfrac{1}{7}$ mặt khác ta cũng có đánh giá

$$\left(\frac{1}{x^2+2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{x^2-6x+11}-\frac{1}{3}\right)=\frac{(x-1)(2-x)(x^2-3x-2)}{2(x^2+2)(x^2-6x+11)}\ge\frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{9}\ge\frac{(x-1)(x-2)}{3}$$

$\sqrt{x(3-x)}-\sqrt{2}=\dfrac{(x-1)(2-x)}{\sqrt{x(3-x)}+\sqrt{2}}\ge\dfrac{(x-1)(2-x)}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=\dfrac{(x-1)(2-x)}{3}$ từ đây ta có

$P\ge\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{(x-1)(x-2)}{3}+\sqrt{2}+\dfrac{(x-1)(2-x)}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$ dấu =khi $(x,y,z)=(2,1,0)$ và hoán vị

Bài 20 : Cho các số thực $a\ge c\ge b>0$ thỏa mãn $a+c=2b+1$ tìm giá trị lớn nhất của :

$$P=\sqrt{\frac{a^2b}{(a+b+1)^2+4(2ab-ac)}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}+\sqrt{c-b+4}$$

(Trích đề thầy Đinh Công Diêu)

Bài giải

Thay $a+c-2b=1$ ta có các đánh giá:

$(a+b+1)^2+4(2ab-ac)=(2a+c-b)^2+4(2ab-ac)=(b-c)^2+4a(a+b)\ge 4a(a+b)$

$$P=\sqrt{\frac{a(a^2-b^2)}{(a+b+1)^2+4(2ab-ac)}}+\sqrt{\frac{4a+5c-9b}{a+c-2b}}\le\sqrt{\frac{a(a^2-b^2)}{4a(a+b)}}+\sqrt{\frac{4a+5c-9b}{a+c-2b}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+c-2b}}+\sqrt{5-\frac{a-b}{a+c-2b}}\le\sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{a-b}{a+c-2b}+5-\frac{a-b}{a+c-2b}\right)}=\frac{5}{2}\text{(Cauchy-schwart)}$$

Vậy max $P=\frac{5}{2}$ khi $(a,b,c)=(2,1,1)$

Bài 21: Cho các số thực $x,y,z\in[0;2]$ và $0<x+y+z\le 4$ tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{12(x+y)-4xyz}{(3-x)(3-y)}+\frac{72}{x^4+2y^3+4z^2+8}$$

Bài giải

$$\frac{72}{x^4+2y^3+4z^2+8}\ge\frac{72}{2(x^3+y^3)+24}=3-\frac{3(x^3+y^3)}{x^3+y^3+12}$$

Ngoài ra $\frac{12(x+y)-4xyz}{(3-x)(3-y)}\ge\frac{12(x+y)-2(x+y)^2}{3(3-x)}\ge\frac{4(x+y)}{3(3-x)}$.từ đó suy ra:

$P\ge 3-\frac{3(x^3+y^3)}{x^3+y^3+12}+\frac{4(x+y)}{3(3-x)}=G$ .trong G thì x và y đối xứng ta giả sử $x\ge y$ thế thì

$$P\ge 3-\frac{3x^2(x+y)}{12}+\frac{4(x+y)}{3(3-x)}$$

$$x^2(3-x)=4-(x-2)^2(x+1)\le 4\Rightarrow 3-\frac{3x^2(x+y)}{12}+\frac{4(x+y)}{3(3-x)}\ge 3+\frac{4(x+y)}{3(3-x)}-\frac{x+y}{3-x}\ge 3$$

$\to P\ge 3.\min=3.khi(x,y,z)=(0,0,2)$

Bài 22: Cho các số không âm x,y,z và $xy+yz+zx>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}\le x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$$

Bài giải

Không mất tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$ thế thì: $\sqrt{y^2-z(y-z)}+\sqrt{x^2-z(x-z)}\le x+y$

Mà dễ thấy: $\sqrt{x^2-xy+y^2}\ge\frac{x+y}{2}$ và $\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}\ge\frac{x+y-2z}{2}$

Từ đó: $\sqrt{x^2-xy+y^2}-\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}=\frac{z(x+y-z)}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}}$

$\le\frac{z(x+y-z)}{\frac{x+y}{2}+\frac{x+y-2z}{2}}=z$ từ đó ta có ĐPCM dấu = khi $x=y=z$ hoặc 1 trong 3 biến bằng 0

Bài 23: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P=\sqrt{(a-3)^2+(b-6)^2+(c-7)^2}+2\sqrt{(a+3)^2+(b-6)^2+(c+5)^2}$

Bài giải

Có $14=(a-1)^2+1+(b-2)^2+(c-3)^2+4\geq 2|a-1|+(b-2)^2+4|c-3|\geq(b-2)^2+2(1-a)+4(3-c)$

$\Rightarrow 8(a-1)+16(c-3)\geq 4(b-2)^2-56$

Mặt khác ta có $\sqrt{(a-3)^2+(b-6)^2+(c-7)^2}+\sqrt{(a+3)^2+(b-6)^2+(c+5)^2}$

$\geq\sqrt{(3-a+a+3)^2+4(b-6)^2+(7-c+c+5)^2}=\sqrt{4(b-6)^2+180}$

Và $\sqrt{(a+3)^2+(b-6)^2+(c+5)^2}=\sqrt{(a-1)^2+8(a-1)+16+(b-6)^2+(c-3)^2+16(c-3)+64}$

$\geq\sqrt{(b-6)^2+9-(b-2)^2+4(b-2)^2+80-56}=\sqrt{4b^2-24b+81}$

$\Rightarrow P\geq\sqrt{4(b-6)^2+180}+\sqrt{4b^2-24b+81}$

Xét hàm số $f(b)=\sqrt{4(b-6)^2+180}+\sqrt{4b^2-24b+81}\Rightarrow f(b)\geq f(4)=21$

Vậy $P_{\min}=21\Leftrightarrow(a;b;c)=(0;4;1)$

Bài 24 : Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $0\leq a\leq b\leq 1\leq c$ và $2b^2+c^2+a^2+4(2a+b+c)=18$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=a^2c+c^2b+b^2a-\dfrac{13}{2a-5b+6\left(\sqrt{b}+\sqrt[3]{4bc}\right)}$

Bài giải

Ta có $a^2c+c^2b+b^2a-b(a+c)^2=a(b-c)(b-a)-abc\leq 0\to a^2c+c^2b+b^2a\leq b(a+c)^2$

Mặt khác $b(a+c)^2\leq\dfrac{4(a+b+c)^3}{27}(am-gm)$ cũng theo BĐT am-gm:

$2a-5b+6\sqrt{b}+6\sqrt[3]{4bc}\leq 2a-5b+3(b+1)+2(2+2b+c)=2(a+b+c)+7$ từ giả thiết ta có :

$24=a^2+2(b^2+1)+(c^2+4)+4(2a+b+c)\geq 4b+4c+4(2a+b+c)\to a+b+c\leq 3$ ta có

$P\leq\dfrac{4(a+b+c)^3}{27}-\dfrac{13}{2(a+b+c)+7}\leq\dfrac{4.27}{27}-\dfrac{13}{2.3+7}=3$. Vậy Max P=3 khi $(a,b,c)=(0,1,2)$

Bài 25: Cho các số thực $\begin{cases}x\in[0;1];y,z\in(0;1]\\ x=\min(x,y,z)\end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x+z+3xz}{y^2}+\frac{x+y+3xy}{\sqrt{x^2+z\sqrt{xz}+z^2}}+\sqrt{\frac{2x+4y}{x+y+z}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2x+2y^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2y+x^2z+2z^2y}}\right)$$

Bài giải

Hình thức cồng kềnh nhưng bài này xử lí khá nhàn:chú ý là:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2x+2y^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2y+x^2z+2z^2y}}\geq\frac{4}{\sqrt{2\left(x^3+y^2x+2y^3+2x^2y+x^2z+2z^2y\right)}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2(x+2y)(x^2+y^2+z^2)+xz(x-z)}}\ge\frac{4}{\sqrt{2(x+2y)(x^2+y^2+z^2)}}\ge\frac{4}{\sqrt{2(x+2y)(x+y+z)}}$$

Mặt khác $x^2+z\sqrt{xz+z^2}\le(x+z)^2\Leftrightarrow z(2x+z)\ge z\sqrt{xz+z^2}\Leftrightarrow 3xz\ge 0$:đúng nên

$$P\ge\frac{x+z+3xz}{y^2}+\frac{x+y+3xy}{z+x}+\frac{4}{x+y+z}\ge\frac{x+z}{1}+\frac{xy+yz}{z+x}+\frac{4}{x+y+z}=\frac{(x+y-2)^2}{4}+4\ge 4$$

Min P=4 khi $x=0$ và $y=z=1$

Bài 26: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\frac{3}{4}(x+y+z)^4$.

Bài giải

Chứng minh bất đẳng phụ sau $4^t\le 3t+1,\forall t\in[0;1]$. Xét hàm số $f(t)=4^t-3t-1,\forall t\in[0;1]$.

Ta có: $f'(t)=4^t.\ln 4-3$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_4\left(\frac{3}{\ln 4}\right)\in(0;1)$.

Ta có: $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2\Leftrightarrow 0<x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+zx\le 1$

Suy ra: $x,y,z\in[0;1]$. Dấu "=" xảy ra khi (x;y;z) = (1;0;0) hoặc các hoán vị.

Và $2(x^2+y^2+z^2)\le 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\le 2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$

Do $4^t\le 3t+1,\forall t\in[0;1]\Rightarrow 4^x+4^y+4^z\le 3(x+y+z)+3$

Mặt khác: $x^4+y^4+z^4\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow\ln(x^4+y^4+z^4)\le\ln(x^2+y^2+z^2)\le 0$

Từ đó ta có: $P\le 3(x+y+z)+3-\frac{3}{4}(x+y+z)^4\le\frac{21}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi (x;y;z) = (1;0;0) hoặc các hoán vị.

Vậy MaxP $=\frac{21}{4}$.

Bài 27: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $0<x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\le 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^4+y^4+z^4-\frac{(x+y+z)^6}{5(x^2+y^2+z^2)}$

Bài giải

Cách 1

$$+)\frac{(x+y+z)^6}{5(x^2+y^2+z^2)}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^3}{5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz)}=\frac{(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2}{5}$$

$$+)x^4+y^4+z^4\le(x^2+y^2+z^2)^2\le(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2$$

$$\Rightarrow P\le\frac{4(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz)^2}{5}\le\frac{4.81}{5}=\frac{324}{5}$$

Vậy $P_{max}=\frac{324}{5}$ tại $(x;y;z)=(3;0;0)$ và các hoán vị .

Cách 2

Ta có : $x^2 \le 9-(y^2+z^2+xy+yz+xz) \le 9 \Rightarrow x \in [0;3]$

Tương tự $\Rightarrow y,z \in [0;3]$

Khi đó $\begin{cases} x(x^3-27)\le 0 \\ y(y^3-27)\le 0 \\ z(z^3-27)\le 0 \end{cases} \Rightarrow x^4+y^4+z^4 \le 27(x+y+z)$

Và $\begin{cases} x(x-3)\le 0 \\ y(y-3)\le 0 \\ z(z-3)\le 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 3(x+y+z)$

Suy ra $P \le 27(x+y+z)-\dfrac{(x+y+z)^6}{15(x+y+z)}$

Xét hàm số $f(t)=27t-\dfrac{t^5}{15}$ với $t=x+y+z, 0<t\le 9 \Rightarrow f(t)_{max}=f(3)=\dfrac{324}{5}$

Vậy $P_{max}=\dfrac{324}{5}$ tại $(x;y;z)=(3;0;0)$ và các hoán vị .

Bài 28: Giả sử x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}+\frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1)$$

Bài giải

Giả sử $z=\min\{x,y,z\}$. Đặt $x+\dfrac{z}{2}=u>0; y+\dfrac{z}{2}=v>0$. Khi đó ta có

$$x^2+z^2 \le \left(x+\frac{z}{2}\right)^2=u^2; y^2+z^2 \le \left(y+\frac{z}{2}\right)^2=v^2\ ;\ x^2+y^2 \le \left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=u^2+v^2$$

Chú ý rằng với hai số thực dương u, v ta luôn có $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\ge \dfrac{4}{u+v}$ và $\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}\ge \dfrac{8}{(u+v)^2}$ (2)

Từ (1) và áp dụng (2) ta được $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{y^2+z^2}+\dfrac{1}{z^2+x^2}\ge \dfrac{1}{u^2+v^2}+\dfrac{1}{v^2}+\dfrac{1}{u^2}$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\ge \frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{2uv}+\frac{6}{(u+v)^2}$$

$$\ge \frac{4}{(u+v)^2}+\frac{6}{(u+v)^2}=\frac{10}{(u+v)^2}=\frac{10}{(x+y+z)^2} \qquad (3)$$

Mặt khác ta có $(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1=xyz+x+y+z+2\ge x+y+z+2$

Từ (3) và (4) suy ra $P\ge \dfrac{10}{(x+y+z)^2}+\dfrac{5}{2}(x+y+z)+5$ (5)

Đặt $x+y+z=t>0$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{10}{t^2}+\dfrac{5}{2}t, t>0$

Ta có $f'(t)=-\dfrac{20}{t^3}+\dfrac{5}{2}, t>0$

Suy ra $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2; f'(t)>0 \Leftrightarrow t>2; f'(t)<0 \Leftrightarrow 0<t<2$. Suy ra $f(t)\ge f(2)=\dfrac{15}{2}$ với mọi t > 0 (6)

Từ (5) và (6) ta được $P\ge\dfrac{25}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1, z=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{2}$

Bài 29: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^3+y^3+z^3$

Bài giải

Với hai số không âm a,b ta có $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow 2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 2+a+b+2\sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow \sqrt{1+a+b+ab}\ge\sqrt{1+a+b}$, luôn đúng

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = 0 hoặc b = 0.

Áp dụng (1) ta có $5=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}\ge 1+\sqrt{2+x^2+2y}+\sqrt{1+2z}$

Suy ra $x^2+2y+2z\le 8$, hay $y+z\le 4-\dfrac{x^2}{2}$. Suy ra $P\le 2x^3+(y+z)^3\le 2x^3+\left(4-\dfrac{x^2}{2}\right)^3, 0\le x\le 2\sqrt{2}$

Xét hàm số $f(x)=2x^3+\left(4-\dfrac{x^2}{2}\right)^3, 0\le x\le 2\sqrt{2}$

Ta có $f'(x)=6x^2-3x\left(4-\dfrac{x^2}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}x(x-2)\left[x(12-x^2)+2(16-x^2)\right]$. $\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in(0;2\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Ta có $f(0)=64; f(2)=24; f(2\sqrt{2})=32\sqrt{2}$. Suy ra $f(x)\le 64, \forall x\in\left[0;2\sqrt{2}\right]$.

Suy ra $P\le 64$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=0, z=4$ hoặc $x=z=0, y=4$.

Vậy $\max P=64$ khi $x=y=0, z=4$ hoặc $x=z=0, y=4$

Bài 20: Xét các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0; a+1>0; b+1>0; 2c+1>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{2c+1}$

Bài giải

Ta có $P=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{2c+1}=1-\dfrac{1}{1+a}+1-\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4c+2}=\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{4c+2}\right)$

$\Rightarrow P\le\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{4}{a+b+2}+\dfrac{1}{4c+2}\right)=\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{4}{2-c}+\dfrac{1}{4c+2}\right)$

Xét hàm số $f\left(c\right)=\frac{4}{2-c}+\frac{1}{4c+2}$ với $-\frac{1}{2}<c<2$

$\Rightarrow f'\left(c\right)=\frac{4}{\left(2-c\right)^2}-\frac{4}{\left(4c+2\right)^2}=\frac{4\left(15c^2+20c\right)}{\left(c-2\right)^2\left(4c+2\right)^2}; f'\left(c\right)=0\Leftrightarrow c=0\Rightarrow f\left(c\right)\geq f\left(0\right)=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow P\leq\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0, xảy ra khi $a=b=c=0$

§8: BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

Bài 1: Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}+\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}+\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$$

Bài giải

Ta có $x+y+z=1\Leftrightarrow x+y=1-z$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}=\frac{1-z}{\sqrt{xy+1-x-y}}=\frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}};\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}=\frac{1-x}{\sqrt{yz+1-y-z}}=\frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}$$

$$\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}=\frac{1-y}{\sqrt{zx+1-x-z}}=\frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$$

$$\Rightarrow P=\frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}+\frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}+\frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}\geq 3$$

Vậy $MinP=3$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Bài 2: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x>y;(x+z)(y+z)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{4}{(x+z)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}$

Bài giải

$$a=x+z\Rightarrow y+z=\frac{1}{a};x>y\Rightarrow x+z>y+z\Rightarrow a>\frac{1}{a}\Rightarrow a>1\Rightarrow x-y=x+z-(y+z)=\frac{a^2-1}{a}$$

Khi đó $P=\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+\frac{4}{a^2}+4a^2=\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+3a^2+\frac{4}{a^2}+a^2\geq\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+3a^2+4$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+3t+4\left(t=a^2\right)\Rightarrow f'(t)=\frac{-t-1}{(t-1)^3}+3;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow \min P=f(2)=12$

Bài 3 : Cho a,b,c là các số dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}.$$

Bài giải

Vì a + b + c = 3 ta có $\dfrac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)$

Vì theo BĐT Cô-Si: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\ge\dfrac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ b = c

Tương tự $\dfrac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{1}{b+c}\right)$ và $\dfrac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{c+b}\right)$

Suy ra P$\le\dfrac{bc+ca}{2(a+b)}+\dfrac{ab+bc}{2(c+a)}+\dfrac{ab+ca}{2(b+c)}=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$,

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1. Vậy max P = $\dfrac{3}{2}$ khi a = b = c = 1.

Bài 4 : Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x > y và $xy+(x+y)z+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{4(x-y)^2}+\dfrac{1}{(x+z)^2}+\dfrac{1}{(y+z)^2}$.

Bài giải

Đặt x + z = a. từ giả thuyết bài toán ta có (x + z)(y + z) = 1, hay $y+z=\dfrac{1}{a}$.

Do x > y nên x + z > y + z. suy ra a > 1.

Ta có x – y = x + z – (y + z) = $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}$.

Khi đó $P=\dfrac{a^2}{4(a^2-1)^2}+\dfrac{1}{a^2}+a^2=\dfrac{a^2}{4(a^2-1)^2}+\dfrac{3a^2}{4}+\left(\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{1}{a^2}\right)\ge\dfrac{a^2}{2(a^2-1)^2}+\dfrac{3a^2}{4}+1$ (1)

Đặt $a^2=t>1$. xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{4(t-1)^2}+\dfrac{3t}{4}+1$ với t > 1.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-t-1}{4(t-1)^3}+\dfrac{3}{4}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow(t-2)(3t^2-3t+2)=0\Leftrightarrow t=2$

Dựa vào BBT ta có $f(t)\ge3$ với mọi t > 1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\ge3$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x+z=\sqrt{2}, y+z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3

Bài 5 : Cho ba số dương a,b,c thay đổi và thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm GTLN của biểu thức $S=\sqrt{\dfrac{ab}{ab+2c}}+\sqrt{\dfrac{bc}{bc+2a}}+\sqrt{\dfrac{ca}{ca+2b}}$

Bài giải

Ta có $\sqrt{\dfrac{ab}{ab+2c}}=\sqrt{\dfrac{ab}{ab+(a+b+c)c}}=\sqrt{\dfrac{ab}{(a+c)(b+c)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+c}+\dfrac{b}{b+c}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a+c}=\dfrac{b}{b+c}$

Tương tự ta cũng có $\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right), \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)$

Cộng các vế ta được $S \le \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Vậy $S_{\max}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$

Bài 6: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+z}{x+2y+1}-\frac{z}{y+1}-\frac{4x^2}{(x+y)^2}$

Bài giải

Ta sẽ chứng minh $\frac{x+z}{x+2y+1} \le \frac{x}{x+y}$ Thật vậy

$\Leftrightarrow xz+yz \le x+xy \Leftrightarrow 2x+2xy-2xz-2yz \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz \ge 0 \Leftrightarrow (x+y-z)^2 \ge 0$

Tương tự ta chứng minh được $\frac{z}{y+1} \le \frac{x}{x+y} \Rightarrow P \le \frac{2x}{x+y}-4(\frac{x}{x+y})^2 \le \frac{1}{4}$

Vậy $P_{\max}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x,y,z)=(\frac{1}{13},\frac{3}{13},\frac{4}{13})$

§9: BẤT ĐẲNG THỨC MINCOPXKY

Bài 1 : Cho ba số thực dương $x;y;z$ thỏa mãn: $xyz=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P=\sqrt{\log_3^2 x+1}+\sqrt{\log_3^2 y+1}+\sqrt{\log_3^2 z+1}$

Bài giải

Trong mp(Oxy), gọi $\vec{a}=(\log_3 x;1),\vec{b}=(\log_3 y;1),\vec{c}=(\log_3 z;1)$ và $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\vec{n}=(1;3)$

Ta có: $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|\ge|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\Rightarrow\sqrt{\log_3^2 x+1}+\sqrt{\log_3^2 y+1}+\sqrt{\log_3^2 z+1}\ge\sqrt{1^2+3^2}$

$\Rightarrow P\ge\sqrt{10}$, dấu = xảy ra khi ba vecto $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ cùng hướng và kết hợp điều kiện đề bài ta được $x=y=z=\sqrt[3]{3}$

Vậy $\min P=\sqrt{10}$ khi $x=y=z=\sqrt[3]{3}$

Bài 2 : Cho các số thực x,y,z thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{y^2+z^2-2z+1}+\sqrt{z^2+x^2-2x+1}$

Bài giải

Ta có $P=\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-z)^2}+\sqrt{z^2+(1-x)^2}$

Vì $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$ nên $P\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x+1-y|+|y+1-z|+|z+1-x|\right)$

và $|a|+|b|+|c|\ge|a+b+c|$ nên $P\ge\frac{1}{\sqrt{2}}|x+1-y+y+1-z+z+1-x|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$. Vậy $\min P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Bài 3 : Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+|y-2|$

Bài giải

Xét các điểm $M(x-1;-y),N(x+1;y)$

Ta có $OM+ON\ge MN\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\ge\sqrt{4+4y^2}=2\sqrt{1+y^2}$

Do đó $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|\le P$

Với $y\le2\Rightarrow f(y)=2\sqrt{1+y^2}+(2-y)\Rightarrow f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$

Khi đó $f'(y)=0 \Leftrightarrow 2y=\sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ 4y^2=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Với $y\geq 2 \Rightarrow f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|\geq 2\sqrt{1+y^2}\geq 2\sqrt{5}>2+\sqrt{3}$

Vậy $P\geq 2+\sqrt{3}$ với mọi x, y. Khi x = 0 và $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ thì $P=2+\sqrt{3}$

Do đó P nhỏ nhất bằng $2+\sqrt{3}$, khi x = 0 và $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 4: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{2y^2+3xy+4x^2}-3(x+y)^2\leq 0$

Tìm GTNN của P: $2(x^3+y^3)+2(x^2+y^2)-xy+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$

Bài giải

Ta có: $\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{2y^2+3xy+4x^2}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{23}{8}}y\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}(y+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{23}{8}}x\right)^2}\geq 3|x+y|\geq 3(x+y)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y\geq 0$. Đặt x + y = t ta có $\begin{cases} t^2-t\geq 0 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t\geq 1 \end{array}\right.(*)$

Ta có $P=2t^3+2t^2-xy(6t+5)+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$

$$P\geq 2t^3+2t^2-\frac{t^2}{4}(6t+5)+\sqrt{x^2+4}\Leftrightarrow 4P\geq 2t^3+2t^2+4\sqrt{x^2+4}=f(t)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+2t^2+4\sqrt{x^2+4}$ trên (*), $f^{/}(t)=6t^2+6t+\frac{4t}{\sqrt{t^2+4}}\geq 0$

Với mọi t thỏa mãn (*). Suy ra $f(t)\geq\{f(0);f(1)\}=f(0)=8$

Bài 5 : Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{8x^2+4xz+5z^2}=4x+y+2z$ và $x\in[0;5]$.Tìm GTNN-GTLN : $P=\sqrt{2z+21-xy}-\sqrt{x+z+10-xy}$

Bài giải

Ta có $\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{8x^2+4xz+5z^2}=4x+y+2z=\sqrt{(2x+y)^2+(x-y)^2}+\sqrt{(2x+2z)^2+(2x-z)^2}$

$\Rightarrow 4x+y+2z\geq|2x+y|+|2x+2z|\geq 4x+y+2z$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} x=y \\ 2x=z \\ 2x+y\geq 0 \\ 2x+2z\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P=\sqrt{4x+21-x^2}+\sqrt{3x+10-x^2}$ với $x\in[0;5]$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{4x+21-x^2}+\sqrt{3x+10-x^2}$ với $x\in[0;5]$ Ta tìm được max-min

Bài 6: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+y)\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{2}{z^2}}+\sqrt{\dfrac{x+y+z}{2xy+z^2}}$.

Bài giải

Ta có $P=\sqrt{(x+y)^2+\dfrac{2(x+y)^2}{x^2y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{2}{z^2}}+\sqrt{\dfrac{x+y+z}{2xy+z^2}}$

$=\sqrt{(x+y)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right)^2}+\sqrt{z^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{z}\right)^2}+\sqrt{\dfrac{x+y+z}{2xy+z^2}}$.

Xét các vec tơ $\vec{u}=\left(x+y;\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right)$, $\vec{v}=\left(z;\dfrac{\sqrt{2}}{z}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$, ta có

$=\sqrt{(x+y)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right)^2}+\sqrt{z^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{z}\right)^2}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}+\dfrac{\sqrt{2}}{z}\right)^2}=\sqrt{(x+y+z)^2+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2}$

$\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\dfrac{9}{x+y+z}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2}$

$\ge\sqrt{18+\left(\dfrac{9}{x+y+z}\right)^2}$.

Suy ra P $\ge\sqrt{18+\left(\dfrac{9}{x+y+z}\right)^2}+\sqrt{\dfrac{x+y+z}{2xy+z^2}}\ge\sqrt{18+\left(\dfrac{9}{x+y+z}\right)^2}+\sqrt{\dfrac{x+y+z}{3}}$.

Đặt $t=x+y+z, 0<t\le\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}=3$. Khi đó $P\ge\sqrt{18+\dfrac{81}{t^2}}+\sqrt{\dfrac{t}{3}}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{18+\dfrac{81}{t^2}}+\sqrt{\dfrac{t}{3}}$ với $0<t\le3$. Ta có $f'(\mathrm{t})=\dfrac{\sqrt{2t^2+9t^3}-54\sqrt{3}}{2\sqrt{3}t^2\sqrt{2t^2+9}}$; $f'(t)<0$, với mọi $0<t\le3$.Suy ra $f(\mathrm{t})\ge f(3)=1+3\sqrt{3}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $1+3\sqrt{3}$, đạt khi x = y = z =1.

§10: BẤT ĐẲNG THỨC CÓ GIẢ THIẾT ĐỒNG BẬC

Bài 1 : Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $3(x^2+y^2+z^2)=2(xy+19yz+xz)$. Tìm GTNN của $P=17\left(\frac{y^3}{x^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\right)+\frac{9}{(x+y+z)^2}-\frac{x}{4(y^2+z^2)}$

Bài giải

Ta có $3(x^2+y^2+z^2)=2(xy+19yz+xz)\Leftrightarrow 2(xy+16yz+xz)=3x^2+3(y-z)^2\ge 3x^2$

$\Rightarrow 3x^2\le 2x(y+z)+32yz\le 2x(y+z)+8(y+z)^2\Rightarrow x\le 2(y+z)$

$\Rightarrow \frac{9}{(x+y+z)^2}-\frac{x}{4(y^2+z^2)}\ge \frac{1}{(y+z)^2}-\frac{1}{y+z}$

$$17(\frac{y^3}{x^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2})\ge 17(\frac{y^4}{y(x^2+z^2)}+\frac{z^4}{z(x^2+y^2)})\ge 17(\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2(y+z)+yz(y+z)})\ge 17(\frac{\frac{(y+z)^4}{4}}{4(y+z)^3+\frac{(y+z)^3}{4}})$$

$\Rightarrow 17(\frac{y^3}{x^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2})\ge y+z\Rightarrow P\ge y+z+\frac{1}{(y+z)^2}-\frac{1}{y+z}$

$=\frac{y+z}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{1}{2(y+z)^2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{y+z}-1)^2-\frac{1}{2}\ge\frac{3-1}{2}=1$

Bài 2 : Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$

Bài giải

Đặt a = x, b = 2y, c = 3z (a,b,c là các số dương thỏa mãn a + b + c = 1)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=5(a^2+b^2+c^2)-6(a^3+b^3+c^3)$

$P=5[a^2+(b+c)^2-2bc]-6[a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)]=2(4-9a)bc-8a^2+8a-1$

Đặt $0<t=bc\le\frac{(b+c)^2}{4}=\frac{(1-a)^2}{4}$. Xét $P(t)=2(4-9a)t-8a^2+8a-1$

+) $a=\frac{4}{9}\Rightarrow P(t)=\frac{79}{81}$ (1)

+) $a\ne\frac{4}{9}$ .P(t) là hàm số bậc nhất đối với t.

Ta có $P(0)=1-2(2a-1)^2\le 1$; $P\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right)=1-\frac{a(3a-1)^2}{2}\le 1$ (2)

Trên $(0,\frac{(1-a)^2}{4}]$. Hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến.

Từ (1) và (2), suy ra GTLN của P(t) trên $(0,\frac{(1-a)^2}{4}]$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Suy ra GTLN của P(t) là 1 khi a = b = c = $\frac{1}{3}$

Suy ra GTLN của P là 1 khi $x=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{6}; z=\frac{1}{9}$

Bài 3: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $5\left(4x^2+y^2+z^2\right)=18\left(xy+yz+zx\right)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{2}{\left(2x+y+z\right)^3}$.

Bài giải

Ta có $5\left(4x^2+y^2+z^2\right)=18\left(xy+yz+zx\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(2x+y+z\right)^2=18\left(xy+yz+zx\right)+10\left(2xy+yz+2zx\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(2x+y+z\right)^2=38x\left(y+z\right)+28yz\le 38x\left(y+z\right)+7\left(y+z\right)^2$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{2x}{y+z}+1\right)^2\le\frac{38x}{y+z}+7\Leftrightarrow\frac{x}{y+z}\le 1\Leftrightarrow x\le y+z$ (Do $y+z>0$).

Mặt khác ta có $\left(y+z\right)^2\le 2\left(y^2+z^2\right)\Leftrightarrow y^2+z^2\ge\frac{1}{2}\left(y+z\right)^2$

Đặt $t=y+z>0$. Khi đó $P\le\frac{y+z}{\frac{1}{2}\left(y+z\right)^2}-\frac{2}{\left(2\left(y+z\right)+y+z\right)^3}=\frac{2}{y+z}-\frac{2}{27\left(y+z\right)^3}=\frac{2}{t}-\frac{2}{27t^3}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{2}{t}-\frac{2}{27t^3}$ với $t>0$. Ta có $f'\left(t\right)=\frac{-2}{t^2}+\frac{2}{9t^4}$.

Với $t>0$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 9t^2-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	$-\infty$	↗	4	↘	0

Ta có $x=\frac{1}{3}, y=z=\frac{1}{6}$ thỏa mãn điều kiện bài toán và khi đó $P=4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 4.

Bài 4: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)=6(xy+yz+zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2(x+y+z)}-(y^2+z^2)$.

Bài giải

Ta có $5x^2+\frac{5}{2}(y+z)^2\le 5x^2+5(y^2+z^2)=6(xy+yz+zx)\le 6x(y+z)+6.\frac{1}{4}(y+z)^2$

Do đó $5x^2-6x(y+z)+(y+z)^2\le 0$, hay $\frac{y+z}{5}\le x\le y+z$

Suy ra x + y + z ≤ 2(y + z)

Khi đó $P\le\sqrt{2(x+y+z)}-\frac{1}{2}(y+z)^2\le\sqrt{4(y+z)}-\frac{1}{2}(y+z)^2=2\sqrt{y+z}-\frac{1}{2}(y+z)^2$

Đặt $\sqrt{y+z}=t$, khi đó $t\ge 0$ và $P\le 2t-\frac{t^4}{2}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{2}t^4$ với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=2-2t^3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t)\le f(1)=\frac{3}{2}$ với mọi $t\ge 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $P\le\frac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=y+z\\ y=z\\ y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=z=\frac{1}{2}\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi x = 1, $y=z=\frac{1}{2}$

Bài 5: Cho $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=xy+xz+10yz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=8xyz-\frac{3x^3}{y^2+z^2}$

Bài giải

Cách 1

$8(x^2+y^2+z^2)=8xy+8xz+80yz\le x^2+16y^2+x^2+16z^2+40y^2+40z^2\Rightarrow x^2\le 8y^2+8z^2$

$12yz=x^2+(y+z)^2-x(y+z)$

$12yz=\frac{1}{4}x^2-x(y+z)+(y+z)^2+\frac{3}{4}x^2=\left(\frac{x}{2}-y-z\right)^2+\frac{3}{4}x^2\ge\frac{3}{4}x^2\Rightarrow x^2\le 16yz$

$\Rightarrow P\ge\frac{x^3}{2}-24x=f(x)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=16$

$M\text{in } f(x)=f(4)=-64$

Khi x = 4, y = z = 1

Cách 2

$x^2+y^2+z^2=xy+xz+10yz \Rightarrow (y+z)^2+x^2=xy+xz+16yz$

$=x(y+z)+16yz \le x(y+z)+3(y+z)^2 \Rightarrow x^2-x(y+z)-2(y+z)^2 \le 0$

$\Rightarrow \frac{x}{y+z} \in [-1,2], x,y,z>0$

$\Rightarrow x \le 2(y+z) \le 2\sqrt{2(y^2+z^2)} \Rightarrow x^2 \le 8(y^2+z^2) \Rightarrow y^2+z^2 \ge \frac{x^2}{8}$

$12yz = x^2 - x(y+z)+(y+z)^2 \Rightarrow x2 \le 16yz$

$\Rightarrow P \ge \frac{x^3}{2}-24x = f(x) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=16$

$M\text{ in } f(x)=f(4)=-64$

§10: BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC

Bài 1: Cho $ab+bc=2c^2, a\le 2c$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}$

Bài giải

$P=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}}+\dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}-1}+\dfrac{1}{1-\frac{a}{c}}$. Đặt $\begin{cases}\frac{a}{c}=x\\ \frac{b}{c}=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P=\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-1}+\frac{1}{1-y}\\ xy+y=2\\ x\le\frac{1}{2}\end{cases}$

$xy+y=2\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2-y}{y}\Rightarrow P=\frac{3y^2+8y-4}{2y^2+2y-4}\\ \frac{2}{y}=x+1\le\frac{3}{2}\Rightarrow y\ge\frac{4}{3}(1)\end{cases}$

$\frac{3y^2+8y-4}{2y^2+2y-4}-\frac{27}{5}=\frac{-(3y-4)(13y+22)}{5(y-1)(2y+4)}\le 0\Rightarrow P_{max}=\frac{27}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=c\\ 3b=4c\end{cases}$

Bài 2: Cho các số dương x, y, z thỏa mãi a > y và (x + z)(x + y) = 1. Tìm GTNN của biểu thức:
$P=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{4}{(x+z)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}$

Bài giải

Đặt x + z = a. Từ giả thiết ta có (x + z)(y + z) = 1 suy ra $y+z=\frac{1}{a}$

Do x > y => x + z > y + z => a > 1

Ta có $x-y=x+z-(y+z)=a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}$

$P=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+\frac{4}{a^2}+4a^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+3a^2+a^2+\frac{4}{a^2}$

Khi đó $P\ge\frac{a^2}{(a^2-1)^2}+3a^2+4$

Đặt $t=a^2>1$. Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+3t+4$ với t > 1

Ta có $f'(t)=\frac{-t-1}{(t-1)^3}+3\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow(t-2)(3t^2-3t+2)=0\Leftrightarrow t=2$

Từ bảng biến thiên có $f(t) \geq 12, \forall t > 1$. Từ (1) và (2) $P \geq 12$. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} x+z=\sqrt{2} \\ y+z=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$. Chẳng hạn khi $\begin{cases} x=1; z=\sqrt{2}-1 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Bài 3: Cho các số thực x, y dương thỏa mãn x – y + 1 ≤ 0

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{x+3y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}-\dfrac{2x+y^2}{5x+5y^2}$

Bài giải

Ta có $x \leq y-1 \Rightarrow 0<\dfrac{x}{y^2} \leq \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$

Đặt $t=\dfrac{x}{y^2} \Rightarrow 0<t \leq \dfrac{1}{4}$ (0.25đ)

Ta có: $T=\dfrac{\dfrac{x}{y^2}+3}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^2+1}}-\dfrac{1}{5}.\dfrac{2.\dfrac{x}{y^2}+1}{\dfrac{x}{y^2}+1} \Rightarrow T=f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}-\dfrac{1}{5}.\dfrac{2t+1}{t+1}$ với $0<t \leq \dfrac{1}{4}$

$f'(t)=\dfrac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}-\dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{(t+1)^2}$

Nhận xét: $0<t \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1-3t \geq \dfrac{1}{4}; \sqrt{(t^2+1)^3} \leq \sqrt{\left(\dfrac{17}{16}\right)^3}=\dfrac{17}{16}.\sqrt{\dfrac{17}{16}} \Rightarrow \dfrac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} \geq \dfrac{4}{17.\sqrt{\dfrac{17}{16}}}$

Và $-\dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{(t+1)^2}>-\dfrac{1}{5}$.Do đó $f'(t)>\dfrac{4}{17.\sqrt{\dfrac{17}{16}}}-\dfrac{1}{5}>0$

Từ đó f(t) đồng biến $\forall t \in \left(0;\dfrac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{13}{\sqrt{17}}-\dfrac{6}{25}$

Đáp số: $\max\limits_{t \in \left(0;\frac{1}{4}\right]} T=\dfrac{13}{\sqrt{17}}-\dfrac{6}{25} \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=1; y=2$

Bài 4 : Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn:

$(a+b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2)$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

Bài giải

Giả sử $x \neq 0$ đặt $x=\dfrac{a}{c}, y=\dfrac{b}{c}$. Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2=2(x^2+y^2+1)$ (0.25đ)

$\Rightarrow 4xy=(x+y)^2-2(x+y)+1$. Đặt u = x + y; v = xy thì $4v=u^2-2u+1\le u^2$

$\Rightarrow u\ge\dfrac{1}{2}$

$$P=\frac{x^3+y^3+1}{(x+y+1)(xy+x+y)}=\frac{u^3+6u^2-3u+4}{(u+1)^3}=1+3\frac{(u-1)^2}{(u+1)^3}\quad (0.25đ)$$

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{(u-1)^2}{(u+1)^3}$ xác định trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ (0.25đ)

Trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ ta tìm được min f(u) = f(1) = 0 và $\max f(u)=f(\frac{1}{2})=f(5)=\dfrac{2}{27}$

Vậy min P = 1 chẳng hạn khi a = 0,b = c $\ne 0$, $\max P=\dfrac{11}{9}$ chẳng hạn khi

<u>Bài 5 :</u> Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2\le\dfrac{z^2}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\right)$$

<u>Bài giải</u>

Ta có : $P\ge(2x^2y^2+z^4)(\dfrac{2}{x^2y^2}+\dfrac{1}{z^4})=5+2(\dfrac{x^2y^2}{z^4}+\dfrac{z^4}{256x^2y^2})+\dfrac{255z^4}{128x^2y^2}$

$$\ge 5+4\sqrt{\frac{1}{256}}+\frac{4.255z^4}{128(x^2+y^2)^2}\ge 5+\frac{1}{4}+\frac{4.255.4}{128}=\frac{297}{8}$$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{297}{8}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{z}{2}$

<u>Bài 6 :</u> Cho các số thực dương a,b,c .Tìm GTNN của $P=\dfrac{12a^3+9b^3+6c^3-9b^2c}{4(a+b+c)^3}$

<u>Bài giải</u>

Ta có $3b^3+3b^3+3c^3\ge 9b^2c\Rightarrow 12a^3+9b^3+6c^3-9b^2c\ge 12a^3+3b^3+3c^3$

Ta sẽ chứng minh $25(12a^3+3b^3+3c^3)\ge 12(a+b+c)^3$. Thật vậy,BĐT tương đương :

$$9\left[(2a)^3+b^3-2ab(2a+b)\right]+9\left[(2a)^3+c^3-2ac(2a+c)\right]$$

$$+3(8a^3+b^3+b^3-6ab^2)+3(8a^3+c^3+c^3-6ac^2)+36\left[b^3+c^3-bc(b+c)\right]+12\left[8a^3+b^3+c^3-6abc\right]\ge 0$$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{12}{25.4}=\dfrac{3}{25}$. Vậy $P_{\min}=\dfrac{3}{25}\Leftrightarrow b=c=2a$

<u>Bài 7 :</u> Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=9$. Tìm GTNN của

$$P=\sum\frac{\sqrt{(a^4+b^4)(a^2+b^2)}}{\sqrt[6]{a^4b^4c}}$$

<u>Bài giải</u>

Ta có : $\sum\sqrt[6]{a^4b^4c}\le\sum\sqrt[6]{abc(\frac{a^2+b^2}{2})(\frac{a^4+b^4}{2})}$

$\Rightarrow P\ge\sum\frac{\sqrt{(a^4+b^4)(a^2+b^2)}}{\sqrt[6]{\frac{abc(a^4+b^4)(a^2+b^2)}{4}}}=\sqrt[6]{\frac{4(a^4+b^4)^2(a^2+b^2)^2}{abc}}$

Lại có : $\sum(a^4+b^4)^2(a^2+b^2)^2\ge\sum\left(\frac{(a+b)^4}{8}\right)^2\frac{(a+b)^4}{4}=\sum\frac{(a+b)^{12}}{256}$

$\Rightarrow P\ge\sum\frac{(a+b)^2}{2\sqrt[6]{abc}}\ge\sum\frac{(a+b)^2}{2\sqrt[6]{27}}\ge\frac{(2(a+b+c))^2}{6\sqrt[6]{27}}=\frac{54}{\sqrt{3}}$

Vậy $P_{\min}=\frac{54}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=b=c=3$

Bài 8 : Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{abc\left(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)}$$

Bài giải

Với các số thực a,b,c dương, ta luôn có bđt đúng:

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)$
$\ge(a-b+c)^2\Rightarrow a+b+c\le\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}(1)$

Do (1) nên:

$$T=\frac{abc(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2})}{(a^2+b^2+z^2)(xy+yz+zx)}\le\frac{abc(1+\sqrt{3})\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{(x^2+y^2+z^2)(ab+bc+ca)}=$$
$$\frac{abc(1+\sqrt{3})}{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(2)$$

Mặt khác theo bđt Cauchy:

$ab+bc+ca\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(3)va`\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}=\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}(4)$

Từ (3) và (4) được: $\frac{1}{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le\frac{1}{3\sqrt{3}abc}(5)$

Do (5) nên (2) suy ra $T\le\frac{abc\left(1+\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}abc}=\frac{3+\sqrt{3}}{9}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi a=b=c. vậy $T_{max}=\frac{3+\sqrt{3}}{9}$ đạt được khi a=b=c

Bài 9 : Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y\le2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=7(x+2y)-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}$

Bài giải

Vì x, y là các số thực dương nên

$$P=(x+y)\left(\frac{7(x+2y)-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}}{x+y}\right)=(x+y)\left(7+\frac{7y-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}}{x+y}\right) \quad (1)$$

Đặt $t=\frac{x}{y}, t>0$ khi đó $\frac{7y-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}}{x+y}=\frac{7-4\sqrt{t^2+2t+8}}{t+1}$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\frac{7-4\sqrt{t^2+2t+8}}{t+1}$ với t > 0

Ta có $f'(t)=\frac{-7\sqrt{t^2+2t+8}+28}{(t+1)^2\sqrt{t^2+2t+8}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{t^2+2t+8}=4\Leftrightarrow t=2$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(t)\le -3$ với mọi t > 0.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi t = 2

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $P\le(x+y)(7-3)\le 8$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}x+y=2\\ t=\frac{x}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 8, đạt khi $x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}$

Bài 10 : Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $xy+1\le y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}+\frac{2y-x}{6(x+y)}$

Bài giải

Do $x>0, y>0, xy\le y-1$ nên $0<\frac{x}{y}\le\frac{y-1}{y^2}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$

Đặt $t=\frac{x}{y}\Rightarrow 0<t\le\frac{1}{4}$. Khi đó $P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6t+6}=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2(t+1)}$

Ta có: $P'(t)=\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-2+3)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}$

Vì $0<t\le\frac{1}{4}\Rightarrow t^2-t+3=t(t-1)+3<3; 7-3t>6; t+1>1$, do đó

$$\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}>\frac{7-3t}{6\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{2(t+1)^2}>-\frac{1}{2}\Rightarrow P'(t)>\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}>0$$

Vậy $P(t)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{4}\right]$, suy ra $P(t)\le P\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$

Khi $x=\frac{1}{2}; y=2$ thì ta có $P=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}\Rightarrow MaxP=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}; y=2$

Bài 11: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{4a}{b}\left(1+\frac{2c}{b}\right)+\frac{b}{a}\left(1+\frac{c}{a}\right)=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{bc}{a(b+2c)}+\frac{2ca}{b(c+a)}+\frac{2ab}{c(2a+b)}$.

Bài giải

Đặt $x=\frac{2}{a}, y=\frac{4}{b}, z=\frac{1}{c}$ (x, y, z > 0).

Điều kiện đã cho trở thành: $\frac{x^3+y^3}{xyz}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=6$ (*)

Ta có: $x^3+y^3\ge\frac{(x+y)^3}{4}$ và $(x+y)^2\ge 4xy$

Do đó: $\frac{x^3+y^3}{xyz}\ge\frac{(x+y)^3}{4xyz}\ge\frac{4xy(x+y)}{4xyz}=\frac{x+y}{z}$

Mặt khác $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ nên $6=\frac{x^3+y^3}{xyz}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge\frac{x+y}{z}+4 \Rightarrow 0<\frac{x+y}{z}\le 2$.

Ta có: $P=\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{2z+x}+\frac{4z}{x+y}=\frac{x^2}{xy+2zx}+\frac{y^2}{2yz+xy}+\frac{4z}{x+y}$

$\ge\frac{(x+y)^2}{2xy+2z(x+y)}+\frac{4z}{x+y}\ge\frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2}+2z(x+y)}+\frac{4z}{x+y}=\frac{2(x+y)}{x+y+4z}+\frac{4z}{x+y}$

Suy ra: $P\ge\frac{2\frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z}+4}+\frac{4}{\frac{x+y}{z}}$.

Đặt $t=\frac{x+y}{z}$, $0<t\le 2$. Ta có $P\ge\frac{2t}{t+4}+\frac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2t}{t+4}+\frac{4}{t}$ $(0<t\le 2)$.

$f'(t)=\frac{4(t^2-8t-16)}{t^2(t+4)^2}<0, \forall t\in(0;2] \Rightarrow$ f(t) nghịch biến trên (0 ; 2].

Suy ra: $P\ge f(t)\ge f(2)=\frac{8}{3}$.

$P=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \frac{x+y}{z}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow 2a=b=4c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8}{3}$, khi 2a = b = 4c.

Bài 12: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{a+3c}{a+2b+c}+\dfrac{4b}{a+b+2c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}$.

Bài giải

Đặt $\begin{cases} x=a+2b+c \\ y=a+b+2c \\ z=a+b+3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+5y-3z \\ b=x-2y+z \\ c=-y+z \end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}-\frac{-8y+8z}{z}=\left(\frac{4x}{y}+\frac{2y}{x}\right)+\left(\frac{8y}{z}+\frac{4z}{y}\right)-17$$

$$P\geq 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}}+2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}}-17=12\sqrt{2}-17;$$

Đẳng thức xảy ra khi $b=\left(1+\sqrt{2}\right)a, c=\left(4+3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2}-17$.

§11: PHƯƠNG PHÁP CỐ ĐỊNH BIẾN SỐ

Bài 1 : Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$.

Bài giải

Đặt $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}\Rightarrow x, y, z>0,\ 2x+8y+21z\le 12xyz$ và $S=x+2y+3z$.

$$2x+8y+21z\le 12xyz \Rightarrow z(12xy-21)\ge 2x+8y\Rightarrow \begin{cases} z\ge \dfrac{2x+8y}{12xy-21} \\ 12xy-21>0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} z\ge \dfrac{2x+8y}{12xy-21} \\ x>\dfrac{7}{4y} \end{cases}$$

Ta có: $S\ge x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$.

Xét hàm số $f(x)=x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$ trên $\left(\frac{7}{4y};+\infty\right)$

$$f'(x)=1-\frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{7}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}\in\left(\frac{7}{4y};+\infty\right)$$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $y=f(x)$ ta có:

$$S\ge f(x)\ge f\left(\frac{7}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}\right)=2y+\frac{9}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$$

Xét hàm số $g(y)=2y+\frac{9}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$ trên $(0;+\infty)$

$$g'(y)=\frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}}=0\Leftrightarrow y=\frac{5}{4}\in(0;+\infty)$$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $z=g(y)$ ta có: $S\ge g(y)\ge g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{2}$

Vậy $\min S=\frac{15}{2}$ khi $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{5}$, $c=\frac{3}{2}$.

Bài 2 : Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện 2(x + y) + 7z =xyz.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức S = 2x + y + 2z

Bài giải

Ta có: 2(x+ y) = z(xy – 7). Do x, y, z là các số dương nên xy – 7 > 0.

Khi đó , từ giả thiết ta được $z=\dfrac{2(x+y)}{xy-7}$ (0.25đ)

Suy ra: $S=f(x;y)=2x+y+\dfrac{4(x+y)}{xy-7}$ với điều kiện x > 0, y > 0, xy > 7 (*)

Với mỗi x cố định, xét đạo hàm của hàm số f(x;y) theo ẩn y ta được:

$$f'(x;y)=1+\frac{4(xy-7)-4x(x+y)}{(xy-7)^2}=1-\frac{18+4x^2}{(xy-7)^2}$$

$$f'_y(x;y)=0\Leftrightarrow x^2y^2-14xy+21-4x^2=0\Leftrightarrow y_0=\frac{7}{x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$$

Suy ra : $f(x;y_0)=2x+\dfrac{11}{x}+4\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}$ (0.25đ)

Xét hàm số: $g(x)=2x+\dfrac{11}{x}+4\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}$ với x > 0 với $g'(x)=2-\dfrac{11}{x^2}-\dfrac{28}{x^3\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=3$

Khi đó $g(x)\ge g(3)\Leftrightarrow g(x)\ge 15$ (0.25đ)

Với điều kiện (*), ta có $S\ge f(x;y_0)=g(x)\ge 15$ (0.25đ)

Vậy minS = 15 khi x = 3, y = 5, z = 2

Bài 3: Cho $x,y,z\ge 0; x^2+y^2+z^2=2$.

Tìm GTNN $P=\dfrac{x^2+yz}{x^2+yz+x+1}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{1+yz}{9}$

Bài giải

Đặt $P=f(yz)\Rightarrow f'(yz)=\dfrac{x+1}{(x^2+yz+x+1)^2}-\dfrac{1}{9}>0\Rightarrow P\le f\left(\dfrac{y^2+z^2}{2}\right)=f\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow P\le\frac{x^2+\dfrac{2-x^2}{2}}{x^2+\dfrac{2-x^2}{2}+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+\dfrac{2-x^2}{2}}{9}$$

Đặt $g(y+z)=\dfrac{y+z}{x+y+z+1}\Rightarrow g'(y+z)=\dfrac{x+1}{(x+y+z+1)^2}>0\Rightarrow g(y+z)\le g\left(\dfrac{y^2+z^2}{2}+1\right)=g\left(\dfrac{2-x^2}{2}+1\right)$

Tóm lại: $P\le\dfrac{x^2+2}{x^2+2x+4}+\dfrac{4-x^2}{2x+6-x^2}-\dfrac{4-x^2}{18}=Q$

Xét hiệu: $Q-\dfrac{17}{18}=\dfrac{x^2+2}{x^2+2x+4}+\dfrac{4-x^2}{2x+6-x^2}-\dfrac{4-x^2}{18}-\dfrac{17}{18}=\dfrac{-x(x^5+9x^3-20x^2+30x+204)}{18(x^2+2x+4)(2x+6-x^2)}\le 0$ với mọi

$x\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ nên $P\le Q\le\dfrac{17}{18}$

Vậy $MaxP=\dfrac{17}{18}$ khi x = 0; y = z = 1

Bài 4: Cho các số thực dương a,b,c thoả $(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)=30$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{b+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}$

Bài giải

Đặt $b=xa, c=ya \Rightarrow x,y>0$. Giả thiết bài toán trở thành $(3+2x+y)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=30$

$\Leftrightarrow 20=2x+\frac{6}{x}+y+\frac{9}{y}+\frac{6x}{y}+\frac{2y}{x}=\frac{x}{2}+\frac{3x}{2y}+\left(\frac{6}{x}+\frac{3}{2}x\right)+\left(y+\frac{9}{y}\right)+\left(\frac{9x}{2y}+\frac{2y}{x}\right)$

$\geq \frac{x}{2}+\frac{3x}{2y}+6+6+6 \Rightarrow x+\frac{3x}{y}\leq 4 \Rightarrow x\leq \frac{4y}{y+3}$

Ta có $P=x+2y-7\sqrt{72+y^2}\leq \frac{4y}{y+3}+2y-7\sqrt{72+y^2}=f(y)$

Xét hàm số $f(y)$ với y>0, ta có:

$f'(y)=\frac{12}{(y+3)^2}+2-\frac{7y}{\sqrt{72+y^2}}$ và $f''(y)=-\frac{24}{(y+3)^2}-\frac{504}{\sqrt{(72+y^2)^3}}<0, \forall y>0$

Suy ra $f'(y)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f'(3)=0 \Rightarrow f'(y)=0 \Leftrightarrow y=3$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(y)\leq f(3)=-55$ hay $P\leq -55$

Đẳng thức xảy ra khi $y=3, x=2 \Leftrightarrow b=2a, c=3a$ .Vậy max P=-55

§12: BẤT ĐẲNG THỨC CÓ HIỆU A-B

Bài 1: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $a^2+b^2+c^2=5$. Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \ge -4$

Bài giải

Ta có: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \ge -4 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \le 4(*)$

Đặt vế trái của (*) là 0

Nếu ab + bc + ca < 0 thì $P \le 0$ suy ra BĐT đã được chứng minh (0.25đ)

Nếu ab + bc + ca ≥ 0, đặt $ab+bc+ca = x \ge 0$ (0.25đ)

$$(a-b)(b-c) \le \left(\frac{a-b+c-a}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \le \frac{(a-c)^3}{4} (1) \quad (0.25đ)$$

Ta có $4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 2(a-c)^2+2(a-b)^2+2(b-c)^2$

$\ge 2(a-c)^2 + [(a-b)+(b-c)] = 2(a-c)^2+(a-c)^2 = 3(a-c)^2$

Suy ra $4(5-x) \ge 3(a-c)^2$, từ đây ta có $x \le 5$ và $a-c \le \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)}$ (2) (0.25đ)

Từ (1), (2) suy ra $P \le \frac{1}{4}x.\sqrt{[\frac{4}{3}(5-x)]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$ (3)

Theo caai a ta có $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3} \le 6\sqrt{3}$ với x thuộc đoạn [0;5]

Nên suy ra $P \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.6\sqrt{3} \Rightarrow P \le 4$

Bài 2: Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt và thỏa mãn các điều kiên a + b + c = 1 **v**à ab + bc + ca > 0. Tìm GTNN của biểu thức $P = 2\left(\sqrt{\frac{2}{(a-b)^2}+\frac{2}{(b-c)^2}}+\frac{1}{|c-a|}\right)+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

Bài giải

BĐT: $\frac{x^2+y^2}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \forall x,y$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} (\forall x,y>0)$.Dấu "=" xảy ra khi x = y

$$P \ge \frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Giả sử a > b > c : $P \ge \frac{10}{a-c}+\frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \ge \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$

Ta có: $(1-b)(1+3b) = \frac{1}{3}(3-3b)(1+3b) \le \frac{4}{3} \Rightarrow P \ge 10\sqrt{6}$

Bài 3: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $a^2+b^2+c^2=5$. Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+bc) \ge -4$

Bài giải

Ta có $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \ge -4 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ac) \le 4\,(*)$.

Đặt vế trái của (*) là P

Nếu $ab+bc+ca<0$ thì $P \le 0$ suy ra BĐT đã được chứng minh

Nếu $ab+bc+ca \ge 0$, đặt $ab+bc+ca=x \ge 0$

$$(a-b)(b-c) \le \left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \le \frac{(a-c)^3}{4} \quad (1)$$

Ta có $4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)=2(a-c)^2+2(a-b)^2+2(b-c)^2$

$$\ge 2(a-c)^2+\left[(a-b)+(b-c)\right]^2=2(a-c)^2+(a-c)^2=3(a-c)^2$$

Suy ra $4(5-x) \ge 3(a-c)^2$, từ đây ta có $x \le 5$ và $a-c \le \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $P \le \frac{1}{4}x.\sqrt{\left[\frac{4}{3}(5-x)\right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{(5-x)^3}$ (3)

Theo câu a ta có: $f(x)=\sqrt{(5-x)^3} \le 6\sqrt{3}$ với $x \in [0;5]$.

Nên suy ra $P \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.6\sqrt{3} \Rightarrow P \le 4$. Vậy (*) được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi a = 2; b = 1; c = 0

§13: PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA VÀ VECTO

Bài 1: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \ge (x+2)(y+2)(z+2).$$

Bài giải

Từ giả thiết suy ra $0 < xy, yz, zx < 4$

Đặt $\sqrt{zy} = 2\cos \text{A}, \sqrt{xz} = 2\cos \text{B}, \sqrt{xy} = 2\cos \text{C}$, trong đó A, B, C là các góc nhọn.

Từ giả thiết suy ra

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1 \Leftrightarrow (\cos C+\cos(A-B))(\cos C+\cos(A+B))=0$$
$$\Leftrightarrow \cos C+\cos(A+B)=0$$

Suy ra A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác. Ta có

$$z=\frac{2\cos A\cos B}{\cos C}; y=\frac{2\cos A\cos \text{C}}{\cos \text{B}}; x=\frac{2\cos \text{C}\cos B}{\cos \text{A}}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{3(\cos A+\cos B+\cos C)^2}{2\cos A\cos B\cos C} \ge \frac{8\sin^2 \text{A}\sin^2 B\sin^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}) \ge 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\text{sinAsinBsinC}}+\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\text{sinAsinBsinC}}+\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \ge \frac{1}{\left(\frac{\text{sinA}+\text{sinB}+\text{sinC}}{3}\right)^3}+\frac{1}{2\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3} \ge \frac{8}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Bài 2 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+4}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2}$

Bài giải

$y=\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+4}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2}$ Tập xác định của hàm số là $D=[0;1]$. Đặt $\begin{cases}\sqrt{x}=\cos t\\ \sqrt{1-x}=\sin t\end{cases}\left(t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$

Khi đó $y=\dfrac{2\cos t-\sin t+4}{\cos t+\sin t+2}=f(t)$ với $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

xét hàm số $f(t)=\dfrac{2\cos t-\sin t+4}{\cos t+\sin t+2}$ với $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$f'(t)=\dfrac{-3-6\cos t}{(\sin t+\cos t+2)^2}<0\forall t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ vậy hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Do đó $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\le f(t)\le f(0)\forall t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow 1\le f(t)\le 2\forall t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Giá trị lớn nhất của $y=\max f(t)=f(0)=2\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=0$

Giá trị nhỏ nhất của $y=\min f(t)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=1$

Bài 3 : Cho các số thực x,y,z thuộc khoảng $(1;4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2(y+z-x)^2}{yz}+\frac{\sqrt{3}(z+x-y)^2}{zx}-\frac{2\sqrt{3}(x+y-z)^2}{xy}$$

Bài giải

Đặt $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y},c=\sqrt{z}$, khi đó $a,b,c\in(1;2)$

→ Tồn tại $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là a, b, c

Khi đó: $P=\dfrac{2\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{b^2c^2}+\dfrac{\sqrt{3}\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}{c^2a^2}-\dfrac{2\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{a^2b^2}$

$=2(2\cos A)^2+\sqrt{3}(2\cos B)^2-2\sqrt{3}(2\cos C)^2=8\cos^2 A+4\sqrt{3}\cos^2 B-8\sqrt{3}\cos^2 C$

$=8.\dfrac{1+\cos 2A}{2}+4\sqrt{3}.\dfrac{1+\cos 2B}{2}-8\sqrt{3}.\dfrac{1+\cos 2C}{2}$

$=4-2\sqrt{3}+4.\cos 2A+2\sqrt{3}.\cos 2B-4\sqrt{3}.\cos 2C \qquad (1)$

Giả sử $\triangle ABC$ có tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp là O và R

Khi đó: $\left(\sqrt{3}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3OA^2+4OB^2+OC^2+4\sqrt{3}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}-2\sqrt{3}\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\ge 0$

$\Leftrightarrow 8R^2+R^2\left[4\sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)-4\cos\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)-2\sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow 4.\cos 2A+2\sqrt{3}.\cos 2B-4\sqrt{3}.\cos 2C\le 8 \qquad (2)$

Từ (1), (2) → $P\le 4-2\sqrt{3}+8=12-2\sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A=30^0,B=45^0,C=105^0$ hay $b=a\sqrt{2},c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}a\Leftrightarrow$

$y=2x,z=\left(2+\sqrt{3}\right)x$ với $x\in\left(1;4(2-\sqrt{3})\right)$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $12-2\sqrt{3}$

Bài 4 : Xét số thực x . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P=\frac{\sqrt{3\left(2x^2+2x+1\right)}}{3}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+\left(3-\sqrt{3}\right)x+3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+\left(3+\sqrt{3}\right)x+3}}$$

Bài giải

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét các điểm $A\left(x;x+1\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Khi đó ta có $P=\frac{OA}{a}+\frac{OB}{b}+\frac{OC}{c}$, trong đó $a=BC,b=CA,c=AB$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có: $P=\frac{OA.GA}{a.GA}+\frac{OB.GB}{b.GB}+\frac{OC.GC}{c.GC}=\frac{3}{2}\left(\frac{OA.GA}{a.m_a}+\frac{OB.GB}{b.m_b}+\frac{OC.GC}{c.m_c}\right)$

Trong đó m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C của ΔABC.
Theo bất đẳng thức Cô si cho hai số thực không âm, ta có

$$a.m_a=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}\le\frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{3a^2+\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$$

Bằng cách tương tự, ta cũng có: $b.m_b\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$ và $c.m_c\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$

Suy ra $P\ge\frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(OA.GA+OB.GB+OC.GC\right)$ (1)

Ta có $OA.GA+OB.GB+OC.GC\ge\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC}$ (2)

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC}=\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right).\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}\right).\overrightarrow{GB}+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{GC}$$

$$=\overrightarrow{OG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\qquad(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $P\ge\sqrt{3}$

Hơn nữa, bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy $P=\sqrt{3}$ khi x = 0.

Vậy $\min P=\sqrt{3}$

§13: PHƯƠNG PHÁP ÉP BIẾN

Bài mẫu: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a,c\ge 1;b\ge 2$. Tìm giá trị nhỏnhất của biểu thức

$$P=\frac{a\left(b+c\right)}{b+2c}+\frac{c\left(a+b\right)}{b+2a}+\frac{3\left(a+c\right)^2+2b^2+8}{4\left(3+ac\right)}$$

(Trích đề thi thử lần 11 thầy Quang Baby)

Bài giải

Ta có $\left(1-a\right)\left(2-b\right)\ge 0\Leftrightarrow 2-2a-b+ab\ge 0\Leftrightarrow 2a+b\le ab+2 \Rightarrow \frac{1}{b+2a}\ge\frac{1}{ab+2}\Rightarrow\frac{c\left(a+b\right)}{b+2a}\ge\frac{c\left(a+b\right)}{ab+2}$

Tương tự ta có $\frac{a\left(b+c\right)}{b+2c}\ge\frac{a\left(b+c\right)}{bc+2}$

Lại có $3\left(a+c\right)^2+2b^2+8=2\left[\left(a+c\right)^2+b^2\right]+\left(a+c\right)^2+8\ge 4\left(a+c\right)b+4ac+8=4\left(ab+ac+bc+2\right)$

$$\Rightarrow P\ge\frac{c\left(a+b\right)}{ab+2}+\frac{a\left(b+c\right)}{bc+2}+\frac{4\left(ab+bc+ca+2\right)}{4\left(ac+3\right)}=\left(\frac{ac+bc}{ab+2}+1\right)+\left(\frac{ab+ac}{bc+2}+1\right)+\frac{ab+bc+ca+2}{ac+3}-2$$

$$=\left(ab+bc+ca+2\right)\left(\frac{1}{ab+2}+\frac{1}{bc+2}+\frac{1}{ac+3}\right)-2\ge\frac{9\left(ab+bc+ca+2\right)}{ab+bc+ca+7}-2$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{9\left(t+2\right)}{t+7}-2=7-\frac{45}{t+7}$

Mà $t=ab+bc+ca\ge 5\Rightarrow P\ge 7-\frac{45}{5+7}=\frac{13}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{13}{4}$, dấu "=" xảy ra khi $a=1,b=2,c=1$

Bài 1: Cho 3 số thực a, b, c thay đổi thuộc đoạn [1;2] và thỏa mãn $a+b+c\le 4$. Chứng minh đẳng thức: $\frac{a^2}{bc+2}+\frac{b^2}{ac+2}+\frac{c^2}{ab+2}>\frac{2}{3}$

(***Trích đề thi thử trường chuyên ĐHSP Hà Nội***)

Bài giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}(b-1)(c-2)\le 0\\(b-2)(c-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc+2\le 2b+c\\bc+2\le b+2c\end{cases}\Rightarrow 2(bc+2)\le 3(b+c)\le 3(4-a)$

Do đó: $\frac{a^2}{bc+2}\ge\frac{2}{3}\frac{a^2}{4-a}$; đẳng thức xảy ra ⇔ a = 0; b = c = 2.

Tương tự: $\frac{b^2}{ac+2}\ge\frac{2}{3}\frac{b^2}{4-b}$ và $\frac{c^2}{ab+2}\ge\frac{2}{3}\frac{c^2}{4-c}$

Suy ra: $\frac{a^2}{bc+2}+\frac{b^2}{ac+2}+\frac{c^2}{ab+2}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{4-a}+\frac{b^2}{4-b}+\frac{c^2}{4-c}\right)(*)$ (Không tồn tại a,b,c để đẳng thức xảy ra)

Xét hàm số: $f(t)=\frac{t^2}{4-t};t\in[1;2]$

Ta có: $f'(t)=\frac{t(8-t)}{(4-t)^2}>0;\forall t\in[1;2]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Suy ra $f(t)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\forall t\in[1;2]$

Thay t bởi a, b, c vào vế trái của (*) ta được:

$$P=\frac{a^2}{bc+2}+\frac{b^2}{ac+2}+\frac{c^2}{ab+2}>\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Vậy $P>\frac{2}{3}$

Bài 2: Với các số thực: $0\le a,b,c\le 2$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1+c}$

(Trích đề thi thử trường THPT chuyên Bắc Ninh)

Bài giải

Ta chứng minh : $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}(*)$. Thật vậy:

$(*)\Leftrightarrow 1+a+1+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+1+a+b+2\sqrt{1+a+b}$

$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)\ge 1+a+b\Leftrightarrow ab\ge 0$ (luôn đúng)

Vì vai trò của a,b,c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $a\le b\le c$

Suy ra : $1\le c\le 2$. Theo (*) ta có: $P\ge 1+\sqrt{1+a+b}+\sqrt{1+c}=1+\sqrt{4-c}+\sqrt{1+c}$

Xét hàm: $f(c)=1+\sqrt{4-c}+\sqrt{1+c};1\le c\le 2$

Ta có $f'(c)=-\frac{1}{2\sqrt{4-c}}+\frac{1}{2\sqrt{1+c}};\ f'(c)=0\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}$

Ta có: $f(1)=f(2)=1+\sqrt{2}+\sqrt{3};\ f\left(\frac{3}{2}\right)=1+\sqrt{10}$. Vậy : $P\ge 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Vậy GTNN của P là: $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Bài 3: Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $a\in[0;1],b\in[0;2],c\in[0;3]$

Tìm gía trị lớn nhất của $P=\frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c}+\frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}+\frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$

Bài giải

Ta có $a\in[0;1],b\in[0;2],c\in[0;3]$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-a)(b+c)\ge 0\\(2-b)(a+c)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c\ge ab+ac\\2a+2c\ge ab+bc\end{cases}\Rightarrow 2a+b+3c\ge 2ab+bc+ac$$

$$\Rightarrow \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} \le \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2ab+ac+bc}$$

Mặt khác $b+c \ge a(b+c)$ (vì $a \in [0;1]$)

$$\Rightarrow \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} \le \frac{8-b}{a(b+c)+b(a+c)+8} = \frac{8-b}{2ab+bc+ac+8}$$

Với mọi số thực x, y, z, ta có:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(y-x)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2) \ge 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{12a^2+3b^2+27c^2} = \sqrt{3\left[(2a)^2+b^2+(3c)^2\right]} \ge \sqrt{(2a+b+3c)^2} = 2a+b+3c \ge 2ab+bc+ac$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8} \le \frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

Suy ra

$$P \le \frac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac} + \frac{8-b}{2ab+bc+ac+8} + \frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac} + \frac{8}{2ab+bc+ac+8}$$

Đặt $t = 2ab+bc+ac \Rightarrow t \in [0;13]$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{8}{t+8}, t \in [0;3]$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2},\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$f(0) = 1;\ f(6) = \frac{16}{7};\ f(13) = \frac{47}{21} \Rightarrow f(t) \le \frac{16}{7}\ \forall t \in [0;13]$$

Do đó: $P \le \frac{16}{7}$. Khi $a=1; b=2; c=\frac{2}{3}$ thì $P = \frac{16}{7}$. Vậy GTLN của P là $\frac{16}{7}$

Bài 4: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x, y, z \ge -1$ và x + y + z = 3.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{x^2+y^2+4(xy+1)} + \frac{y^2-1}{z^2-4z+5}$

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $(x+1)(y+1) \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge -(x+y)-1$ và $x+y = 3-z$

Do đó $x^2+y^2+4(xy+1) = (x+y)^2+2xy+4 \ge (x+y)^2-2(x+y)+2 = (x+y-1)^2+1 = z^2-4z+5$

Khi đó, suy ra $P = \frac{x^2}{x^2+y^2+4(xy+1)} + \frac{y^2-1}{z^2-4z+5} \le \frac{x^2}{z^2-4z+5} + \frac{y^2-1}{z^2-4z+5} = \frac{x^2+y^2-1}{z^2-4z+5}$

Mặt khác: $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy \le (x+y)^2+2(x+y)+2 = (x+y+1)^2+1 = z^2-8z+17$

Vì vậy $P \le \frac{z^2-8z+17}{z^2-4z+5}$. Đặt $t = \frac{z^2-8z+17}{z^2-4z+5}$ (*). Khi đó (*) $\Leftrightarrow (t-1)z^2+(8-4t)z+5t-16=0$

Phương trình này có nghiệm khi $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow (4-2t)^2-(t-1)(5t-16) \ge 0 \Leftrightarrow 5t-t^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 5$

Suy ra $P \le 5$. Dấu xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=\left(-1;\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $(x;y;z)=\left(\frac{5}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 5.

Bài 5: Cho $a\in[1;2]$. Chứng minh rằng $(2^a+3^a+4^a)(6^a+8^a+12^a)<24^{a+1}$

Bài giải

Bất đẳng thức tương đương $\Leftrightarrow (2^a+3^a+4^a)\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right)<24$

Do $a\in[1;2] \Rightarrow 2\le 2^a\le 4; 3\le 3^a\le 9; 4\le 4^a\le 16$

$\Rightarrow 2\le 2^a<16; 2<3^a<16; 4<4^a\le 16$ (0.25đ)

Với $x\in[2;16]$ ta có:

$(x-2)(x-16)\le 0 \Leftrightarrow x^2-18x+32\le 0 \Leftrightarrow x-18+\frac{32}{x}\le 18-x$

Từ đó suy ra: $32\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right)<54-(2^a+3^a+4^a)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right)<\frac{54-(2^a+3^a+4^a)}{32}$

Khi đó: $\Leftrightarrow (2^a+3^a+4^a)\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right)<\frac{(2^a+3^a+4^a)[54-(2^a+3^a+4^a)]}{32}$

Bài 6: Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn: $0<(2a,b)\le 1\le c$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P=\frac{2a(b+c)+bc+ab}{72}-\frac{4a(b+c)}{2(a+b+2c)+1}-\frac{4b(a+c)}{28a^2+7b^2+2c^2+2}$$

(Trích đề thầy Mẫn Ngọc Quang)

Bài giải

Ta có : $2(2a+b-c)^2+5(2a-b)^2\ge 0 \Leftrightarrow 28a^2+7b^2+2c^2\ge 12ab+8ac+4bc$

$2a(b+c)+b(a+c)\le a+b+2c$ do $0<(2a,b)\le 1\le c$

$$P\ge \frac{3ab+2ac+bc}{72}-\frac{4a(b+c)}{3ab+2ac+bc+1}-\frac{4b(a+c)}{12ab+8ac+2bc+2}$$

$$=\frac{3ab+2ac+bc}{72}-\frac{4(ab+ac)}{2\left[3ab+2ac+bc+\frac{1}{2}\right]}-\frac{4b(a+c)}{4\left[3ab+2ac+bc+\frac{1}{2}\right]}$$

$$=\frac{3t}{72}-\frac{t}{t+\frac{1}{2}}, t=3ab+2ac+bc>0$$

Xét hàm số ta có được kết quả dấu bằng xảy ra khi : t = 11/2 , a = ½ , b = 1 , c = 2

Câu 7: Cho các số thực x,y,z thuộc $[0;1]$ và $z=\min\{x,y,z\}$ .Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+z^2}+\frac{\sqrt{y^2+14yz+z^2}}{(y+z)^3}+\frac{8(x+1)(y+1)(z+1)}{x+y+z+2}$$

Bài giải

Do $z=\min\{x,y,z\}$ nên ta có $x^2+z^2\le\left(x+\frac{z}{2}\right)^2$

Ta lại có $z\le y\Rightarrow(y+z)^4=y^4+4y^3z+6y^2z^2+4yz^3+z^4\le y^4+14yz.y^2+y^2z^2=y^2\left(y^2+14yz+z^2\right)$

$$\Rightarrow y^2+14yz+z^2\ge\frac{(y+z)^4}{y^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{y^2+14yz+z^2}}{(y+z)^3}\ge\frac{1}{y(y+z)}\ge\frac{1}{\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}$$

Do đó ta có $P\ge\frac{1}{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}+\frac{8(x+1)(y+1)(z+1)}{x+y+z+2}$

Ta có $\frac{1}{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}\ge\frac{2}{\left(x+\frac{z}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right)}\ge\frac{8}{(x+y+z)^2}$

Và $(x+1)(y+1)(z+1)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz\ge1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)$

Lại có $(1-x)(1-y)(1-z)=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz\ge0$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\ge x+y+z-1+xyz\ge x+y+z-1\Rightarrow P\ge\frac{8}{(x+y+z)^2}+\frac{16(x+y+z)}{x+y+z+2}$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t^2}+\frac{16t}{t+2}$ với $t=a+b+c$ và $t\in[0;3]$

Ta có $f'(t)=-\frac{16}{t^3}+\frac{32}{(t+2)^2};\ f'(t)=0\Rightarrow t=2\Rightarrow f(t)\ge f(2)=10$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 10 , dấu "=" xảy ra khi $x=y=1,z=0$

Câu 8: Cho các số thực $x,y,z\ge1$ thõa mãn $2xyz+1\ge x+y+z.$ Tìm GTLN của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2y^2-2y+1}+\sqrt{2z^2-2z+1}}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{2xyz+1}$$

(Trích đề thi thử lần 9 thầy Quang Baby)

Bài giải

Ta có: $2x(x-1)\ge0 \Rightarrow 4x^2-4x+1\ge2x^2-2x+1\Rightarrow\sqrt{2x^2-2x+1}\le\sqrt{4x^2-4x+1}=2x-1$

Tương tự ta có: $\sqrt{2y^2-2y+1}\le2y-1;\sqrt{2z^2-2z+1}\le2z-1$

Do đó : $P\le\frac{2x-1+2y-1+2z-1}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{2xyz+1}\le\frac{2(x+y+z)-3}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{x+y+z}=\frac{4}{x+y+z}-\frac{3}{(x+y+z)^2}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{t}-\frac{3}{t^2}$ với $t=x+y+z\geq 3$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến nên $P=f(t)\leq f(3)=1$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 1, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Câu 9: Cho $0<a,b,c\leq 1$, $a(4-a-b)=c(a+b)$ Tìm GTNN :
$P=(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)+16a^2+16bc-64a$

(Trích đề thi thử lần 16 thầy Quang Baby)

Bài giải

$0<a,b,c\leq 1$

$a(4-a-b)=c(a+b)\Rightarrow 4a=a^2+ac+bc+ab=(a+b)(a+c)$

$16a^2+16bc-64a=-16(ab+ac)$

$(1+a+b)(1+c+a)(1+b+c)=(1+6a+b+c)(1+b+c)=1+6a+2b+2c+6a(b+c)+(b+c)^2$

$\Rightarrow P=1+6a+2b+2c+6a(b+c)+(b+c)^2-16(ab+ac)$

$\geq 1+(2a+4a^2)+(b+c)^2+2b+2c-10a(b+c)=1+[2a]+\left[4a^2+(b+c)^2\right]+\left[2b+2c\right]-10a(b+c)$

$Vi:0<a,b,c\leq 1\Rightarrow [2a]\geq a(b+c),\left[4a^2+(b+c)^2\right]\geq 4a(b+c),\left[2b+2c\right]\geq 2a(b+c)$

$\Rightarrow P\geq 1+a(b+c)+4a(b+c)+2a(b+c)-10a(b+c)=1-6=-5$

Câu 10: Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}+abc\leq\frac{5}{2}$

(Trích đề thi thử trường THPT Đào Duy Từ năm 2012)

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử: $1\geq a\geq b\geq c\geq 0$

Ta có: $A=\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}+abc\leq\frac{1}{1+bc}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+bc}+bc\leq bc+\frac{1}{1+bc}+\frac{b+c}{1+bc}$

Ta có: $(1-b)(1-c)\geq 0\Leftrightarrow 1-bc\geq b+c\geq 0\Leftrightarrow\frac{b+c}{1+bc}\leq 1$ Vậy nên: $A\leq bc+1+\frac{1}{1+bc}$

Đặt $t=1+ab$ $(1\leq t\leq 2)$ khi đó: $f(t)=t+\frac{1}{t}\Rightarrow f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\geq 0(\forall:1\leq t\leq 2)\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$

$\Rightarrow f(t)_{\max}\leq f(2)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 11: Cho $x,y,z\in[0;2]; xy+yz+zx>0$. Tìm $\min P=x^2+y^2+z^2+10(xy+yz+zx)+\frac{96}{2\sqrt[3]{x^3+y^3}+z}$

(Trích đề thi thử trường THPT Đô Lương 1)

Bài giải

Ta có: $P=5(x+y+z)^2-4(x^2+y^2+z^2)+\frac{96}{2\sqrt[3]{x^3+y^3}+z}$

$x^2+y^2+z^2=\left[x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)\right]+2(x+y+z)\le 2(x+y+z);\ x^3+y^3\le (x+y)^3, z\le 2z.$

Khi đo: $P\ge 5(x+y+z)^2-8(x+y+z)+\dfrac{96}{2(x+y+z)}$

Đặt $t=x+y+z\,(t\ge 0)\Rightarrow P\ge 5t^2-8t+\dfrac{48}{t}\Rightarrow P_{\min}=28\Leftrightarrow x=2,y=z=0.$

Câu 12: Cho $a,b,c\in[1,3], a+b+c=6$. Tìm Max $P=\dfrac{a^4+b^4+5c^2+6abc+1}{ab+bc+ca}-abc$

(Trích đề thi thử trường THPT Đặng Thúc Hứa)

Bài giải

Ta đánh giá: $(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)+(b-2)(b-1)(b+2)(b+1)\le 0\Leftrightarrow a^4+b^4\le 5a^2+5b^2-8$

$\Rightarrow P\le \dfrac{5(a^2+b^2+c^2)+6abc-7}{ab+bc+ca}-abc$

Ta lại có $\begin{cases}(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0\\(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow abc+8\le 2(ab+bc+ca)\le 2(abc+3)$

$\Rightarrow P\le \dfrac{2(6abc+73)}{abc+8}-abc-10\le 5\Rightarrow P_{\max}=5\Leftrightarrow a=b=1,c=2$

Vậy $P_{\max}=5\Leftrightarrow a=b=1,c=2$

Câu 13: Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn: $a\in[0,1], b\in[0,2], c\in[0,3]$

Tìm Max $P=\dfrac{2(2ab+bc+ac)}{1+2a+b+3c}+\dfrac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}+\dfrac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$

(Trích đề thi thử trường THPT Anh Sơn 2)

Bài giải

Ta có $\begin{cases}(1-a)(b+c)\ge 0\\(2-b)(a+c)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 2a+b+3c\ge 2ab+ca+bc$

PTa có: $\begin{cases}b+c\ge a(b+c)\\\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}\ge\sqrt{(2a+b+3c)^2}\end{cases}$

$\Rightarrow P\le \dfrac{2(2ab+bc+ca)}{1+2ab+bc+ca}+\dfrac{8-b}{2ab+bc+ca+8}+\dfrac{b}{2ab+bc+ca+8}$

Đặt $t=2ab+bc+ca\,(t\ge 0)$

$\Rightarrow P\le \dfrac{2t}{1+t}+\dfrac{8}{t+8}\le\dfrac{16}{7}\Rightarrow P_{\max}=\dfrac{16}{7}\Leftrightarrow a=1,b=2,c=\dfrac{2}{3}$

Vậy $P_{\max}=\dfrac{16}{7}\Leftrightarrow a=1,b=2,c=\dfrac{2}{3}$

Câu 14: Cho $x,y,z\in(0,1]$. Chứng minh rằng $P=(1+\frac{1}{xyz})(x+y+z)\ge 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

(Trích đề thi thử trường THPT Ngô Sĩ Liên)

Bài giải

Ta có: $(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy+1\ge x+y\Leftrightarrow 1+\frac{1}{xy}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\ge 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$

Ta có: $P=\left(\frac{1}{xyz}+1\right)(x+y+z)=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+x+y+z\ge 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+x+y+z-3$

$\Rightarrow P\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+x+y+z-3\ge 2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)}+x+y+z-3\Rightarrow P\ge x+y+z+3(dpcm)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 15: Cho $x,y,z\in[1,4], x+y+z=6$. Tìm min : $P=\frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{x^2+y^2-1}{xyz}$

Bài giải

$$P=\frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{x^2+y^2-1}{xyz}=\frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{x^2+y^2}{xyz}-\frac{1}{xyz}\ge\frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{2}{z}-\frac{1}{xyz}$$

Ta có: $\begin{cases}(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy\ge x+y-1=5-z\\(x^2+y^2)=z^2-10z+26\end{cases}$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{z}{8(z^2-10z+26)}+\frac{2}{z}-\frac{1}{z(5-z)}\ge\frac{1}{2}$$

Ta chưng minh: $P\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{(z-4)^2(4z^2-45z+117)}{8z(5-z)(z^2-10z+26)}\ge 0$

$MaxP=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=1,z=4$

Câu 16: Cho $a,b,c\in[0,1]$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}+2(1-a)(1-b)(1-c)$

(Trích đề thi thử lần 6 thầy Đặng Thành Nam)

Bài giải

Giả sử $c\ge b\ge a$. Ta có: $(1-a)(1-b)\ge 0\Leftrightarrow ab+1\ge a+b$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a}{bc+1}\le\frac{2a}{a+b+1}\Leftrightarrow 2bc+1\ge a+b;\frac{b}{ca+1}\le\frac{2b}{a+b+1}\Leftrightarrow 2ca+1\ge a+b;\frac{c}{ab+1}\le\frac{2c}{a+b+1}\Leftrightarrow 2ab+1\ge a+b$$

$$\Rightarrow P\le\frac{2(a+b+c)}{a+b+1}+\frac{2(1-a)(1-b)(1-c)(1+a+b)}{1+a+b}\le\frac{2(a+b+c)}{a+b+1}+\frac{2(1-c)}{1+a+b}=2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=0$ hoặc $a=b=1, c=0$ (hoán vị)

<u>Câu 17:</u> Cho $a,b,c\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ Tìm min $P=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$

(Trích đề thi thử lần 11 thầy Đặng Thành Nam)

<u>Bài giải</u>

Áp dụng AM - GM ta có: $\begin{cases}(1+a+b)\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right)\le\frac{(1+a+b-a-b+5)^3}{27}=8\\(1+c+a)\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right)\le 8\end{cases}$

Ta có $P\le\frac{a}{b+c+1}+\frac{c\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right)}{8}+\frac{b\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-c\right)}{8}+(1-a)(1-b)(1-c)$

Đặt: $f(a)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{c\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right)}{8}+\frac{b\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-c\right)}{8}+(1-a)(1-b)(1-c)$

Ta có: $f(a)_{\min}\ge\left\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$

Ta có +) $f(0)=1+\frac{3}{8}bc-\frac{7}{32}(b+c)=1+b\left(\frac{3}{8}c-\frac{7}{32}\right)-\frac{7}{32}c=g(b)$

Do $\left(\frac{3}{8}c-\frac{7}{32}\right)\le 0,\forall c\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f(0)\ge g(b)\ge g\left(\frac{1}{2}\right)\ge\frac{7}{8}$

+) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2+2(b+c)}+\frac{b+c}{8}+\frac{1}{2}\ge\frac{7}{8}$

Vậy $P_{\min}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

<u>Câu 18:</u> Cho $a,b,c\in[1,3], a+b+c=6$. Tìm max $P=abc(a^3+b^3+c^3)^2$

<u>Bài giải</u>

Ta có: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)=216-18(ab+bc+ca)+3abc$

Ta có: $(a-3)(b-3)(c-3)\le 0\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca)\ge 9(a+b+c)-27+abc=27+abc$

$P\le[3(ab+bc+ca)-27]\{216-18(ab+bc+ca)+3[3(ab+bc+ca)-27]\}^2$

$\Rightarrow P\le 3(ab+bc+ca-9)[135-9(ab+bc+ca)]^2$

$\Rightarrow P\le 7776$

Vậy $P_{\max}=7776\Leftrightarrow a=1, b=2, c=3$ và các hoán vị

Câu 19: Cho $a,b,c\in[1,2], a+b+c=\dfrac{9}{2}$. Tìm GTLN của: $P=a^6+c^6+21b^2+\dfrac{14}{\sqrt{12(a^3+b^3)+28b^2+25}}$

Bài giải

Ta có: $\begin{cases} a^6\le 21a^2-20 \Leftrightarrow (a^2-1)(a^2-4)(a^2+5)\le 0 \\ c^6\le 21c^2-20 \\ 3a^3\le 7a^2-4 \\ 3c^3\le 7c^2-4 \end{cases} \Rightarrow P\le 21(a^2+b^2+c^2)-40-\dfrac{14}{\sqrt{28(a^2+b^2+c^2)-7}}$

Đặt: $t=a^2+b^2+c^2$. Với $\begin{cases}(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0\\ (a-2)(b-2)(c-2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow ab+bc+ca\ge\dfrac{13}{2}\Rightarrow t\le\dfrac{29}{4}$

Câu 20: Cho $\begin{cases} c\ge b\ge a>0 \\ a^2+b^2+2c^2=ab+bc+ca+5 \\ a+2b+4c>9 \end{cases}$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{b^2+ab+bc+3ac}{2}}+\sqrt{2a+4b+8c-18}-\frac{(ab+bc+ca)\sqrt{2}}{4}$$

Bài giải

Từ giã thiết ta sẽ có: $(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow b^2+ca\le b(a+c)$

$\Rightarrow b^2+ab+bc+3ac\le 2(ab+bc+ca)\Rightarrow \sqrt{\dfrac{b^2+ab+bc+3ac}{2}}\le\sqrt{ab+bc+ca}$

Mặt khác ta lại có: $(a-1)^2+(b-2)^2+2(c-2)^2\ge 0\Leftrightarrow 2a+4b+8c-18\le a^2+b^2+2c^2-5=ab+bc+ca$

Suy ra: $\sqrt{2a+4b+8c-18}\le\sqrt{ab+bc+ca}$

Từ đây ta sẽ có: $P\le 2\sqrt{ab+bc+ca}-\dfrac{\sqrt{2}(ab+bc+ca)}{4}=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{ab+bc+ca}-2\sqrt{2}\right)^2\le 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a=1 \\ b=c=2 \end{cases}$

Câu 21: Cho các số thực $x,y,z\in[0;1]$ và $z=\min\{x,y,z\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}}+\dfrac{(yz+1)}{\sqrt{y(y+z)}}+\dfrac{2}{xy+xz-yz}$

(Trích đề thi thử lần 6 thầy Quang Baby)

Lời giải

Với những bài toán có điều kiện biên $x,y,z\in[0;1]$ chúng ta sẽ tìm cách khai thác nó , dự đoán điểm rơi sẽ là: $x=y=1, z=0$.

Hơn nữa với $\frac{2}{xy+xz-yz}$ có chứa $xy+xz-yz$ ở mẫu , đây là hạng tử có thể gợi ý cho chúng ta dồn biến về $xy+xz-yz$.

Ta có: $x,\in[0;1]$. Suy ra $\sqrt{x}\ge x^2$, $\frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}}=\frac{\sqrt{x}(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}}\ge\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}}$

Áp dụng BĐT phụ Cô-Si ngược ta có : $\frac{1}{\sqrt{A.B}}\ge\frac{2}{A+B}$. Dấu bằng khi A = B > 0 . Do dự đoán điểm rơi x = y = 1 , z = 0 nên khả năng x = x + z và y = y + z là hoàn toàn có thể xảy ra .

Ta có: $\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}}\ge x^2(y+z)^2.\frac{2}{2x+z}$ $\qquad\frac{(yz+1)^2}{\sqrt{y(y+z)}}\ge(yz+1)^2.\frac{2}{2y+z}$

Do đó $P\ge\frac{2x^2(y+z)^2}{2x+z}+\frac{2(yz+1)^2}{2y+z}+\frac{2}{xy+xz-yz}\ge\frac{(xy+yz+xz+1)^2}{x+y+z}+\frac{2}{xy+xz-yz}$

$\frac{A^2}{x}+\frac{B^2}{y}\ge\frac{(A+B)^2}{x+y}$,

Với điều kiện: $x,y,z\in[0;1]$, ta luôn có: $(1-x)(1-x)(1-x)\ge0$

$\Leftrightarrow xy+yz+xz+1\ge xyz+x+y+z\ge x+y+z$

Suy ra $P\ge x+y+z+\frac{2}{xy+xz-yz}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $x^2+(y+z)^2\ge2x(y+z)\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge2(xy+xz-yz)$

Mà $x,y,z\in[0;1]$, $\Rightarrow x+y+z\ge x^2+y^2+z^2\ge2(xy+xz-yz)$

Suy ra $P\ge2(xy+xz-yz)+\frac{2}{xy+xz-yz}\overset{AM-GM}{\ge}4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=1\\z=0\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $MinP=4$ đạt được khi $(x;y;z)=(1;1;0)$

Câu 22: Cho hai số thực x,y thỏa mãn điều kiện $1\le x\le2;\ 1\le y\le2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$

(Trích đề thi đại học khối D năm 2014)

Bài giải

Do $1\le x\le2$ nên $(x-1)(x-2)\le0$, nghĩa là $x^2+2\le3x$. Tương tự $y^2+2\le3y$.

Suy ra $P\ge\frac{x+2y}{3x+3y+3}+\frac{y+2x}{3x+3y+3}+\frac{1}{4(x+y-1)}=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{1}{4(x+y-1)}$.

Đặt $t=x+y$, suy ra $2\le t\le4$. Xét $f(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)}$, với $2\le t\le4$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{4(t-1)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Mà $f(2)=\frac{11}{12}; f(3)=\frac{7}{8}; f(4)=\frac{53}{60}$ nên $f(t)\geq f(3)=\frac{7}{8}$. Do đó $P\geq\frac{7}{8}$.

Khi $x=1,y=2$ thì $P=\frac{7}{8}$. Vậy $P_{\min}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

<u>Câu 23:</u> Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$.

(Trích đề thi thpt quốc gia năm 2015)

<u>Bài giải</u>

Đặt $t=ab+bc+ca$.. Ta có: $36=(a+b+c)^2=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+3t\geq 3t$. Suy ra $t\leq 12$.

Mặt khác $(a-1)(b-1)(c-1)\geq 0$ nên $abc\geq ab+bc+ca-5=t-5$;

và $(3-a)(3-b)(3-c)\geq 0$ nên $3t=3(ab+bc+ca)\geq abc+27\geq t+22$. Suy ra $t\geq 11$.

Khi đó $P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2+72}{ab+bc+ca}-\frac{abc}{2}\leq\frac{t^2+72}{t}-\frac{t-5}{2}=\frac{t^2+5t+144}{2t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+5t+144}{2t}$ với $t\in[11;12]$. Ta có $f'(t)=\frac{t^2-144}{2t^2}$.

Do đó $f'(t)\leq 0,\forall t\in[11;12]$, nên $f'(t)$ nghịch biến trên $[11;12]$.

Suy ra $f(t)\leq f(11)=\frac{160}{11}$. Do đó $P\leq\frac{160}{11}\Rightarrow P_{\max}=\frac{160}{11}\Leftrightarrow a=1,b=2,c=3$ và các hoán vị của chúng.

<u>Câu 24:</u> Cho $x,y,z\in[1;3]$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\left(\sqrt{\frac{10}{3}\left(x^2+2y^2+3z^2\right)}-y+z\right)^2+\frac{4608}{x^2+y^2+xy+9z}$$

<u>Bài giải</u>

<u>Câu 25:</u> Cho $\begin{cases}a,b,c\in[1;2]\\a+b+c\geq 5\end{cases}$.Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3(c+1)}{2abc+10c+3(a+b+c^2+1)}+\sqrt{(a+b+1)^2+\frac{13}{4}}+\frac{\sqrt{4c^2+13}}{2}$$

(Trích đề thi thử lần 19 thầy Quang Baby)

<u>Bài giải</u>

Câu 26: Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $a+b+2c=8$.
Tìm GTLN của $P=a^3+b^3+5c^3$

Bài giải

Ta có : $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab\ge (a+b)-1=7-2c$

Khi đó : $P=a^3+b^3+5c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+5c^3\le (8-2c)^3-3(7-2c)(8-2c)+5c^3$

Lại có : $a+b+2c=8\Rightarrow 2c=8-(a+b)\le 8-(1+1)=6\Rightarrow c\le 3$

Xét : $f(c)=(8-2c)^3-3(7-2c)(8-2c)+5c^3$ với $c\in[1;3]$

$\Rightarrow f'(c)=-9c^2+168c-294$

$BBT\Rightarrow f(c)_{\max}=\max\{f(1);f(3)\}=f(3)=137\Leftrightarrow \begin{cases}a=b=1\\ c=3\end{cases}$

Câu 27: cho các số không âm a,b,c sao cho $a,c\in[0;1]$ và $ab+bc+ca\ge 5$ tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a(b+c)}{b+2c}+\frac{c(a+b)}{b+2a}+\frac{3(a+c)^2+2b^2+8}{4(ac+3)}$$

(Trích đề thầy Mẫn Ngọc Quang)

Bài giải

Lưu ý là : $\frac{a(b+c)}{b+2c}+\frac{c(a+b)}{b+2a}=a+c-\frac{2ac(a+b+c)}{(b+2a)(b+2c)}$ mặt khác:

$(b+2a)(b+2c)=b^2+2b(a+c)+4ac=(b-2)^2+4b-4+2(ab+bc+ca)+2ac\ge 4b+6+2ac$

Và $a+b+c=b+ac+1-(a-1)(c-1)\le ac+b+1$ do đó $\frac{a(b+c)}{b+2c}+\frac{c(a+b)}{b+2a}\ge a+c-\frac{ac(b+ac+1)}{2b+ac+3}$

Mà: $a+c-\frac{ac(b+ac+1)}{2b+ac+3}=\frac{ac+2}{2}-(a-1)(c-1)+\frac{ac(1-ac)}{2(2b+ac+3)}$

$=\frac{ac+2}{2}-(a-1)(c-1)-\frac{ac(1-ac)(2b-ac-3)}{4(2b+ac+3)(ac+3)}+\frac{ac(1-ac)}{4(ac+3)}$ tiếp theo ta có đánh giá:

$b-a-c\ge\frac{5-ac}{a+c}-a-c\ge\frac{4}{a+c}-a-c=2(2-a-c)+\frac{(a+c-2)^2}{a+c}\ge 2(2-b-c)$ do đó

$(1-a)(1-c)\le\frac{(2-a-c)^2}{4}\le\frac{(b-a-c)^2}{16}\le\frac{(b-a-c)^2}{4(ac+3)}$ mặt khác dễ thấy $ac\ge a+c-1$ nên:

$(1-ac)(2b-ac-3)\le 2(2-a-c)(b-a-c)\le(b-a-c)^2 => \frac{ac(1-ac)(2b-ac-3)}{4(2b+ac+3)(ac+3)}\le\frac{(b-a-c)^2}{4(ac+3)}$

Lại có: $3(a+c)^2+2b^2+8=4(ab+bc+ca+2)+(b-a-c)^2+(a-c)^2\ge 28+2(b-a-c)^2$

Từ những đánh giá trên ta có :

$$P\ge\frac{(ac+2)}{2}+\frac{ac(1-ac)}{4(ac+3)}-\frac{(b-a-c)^2}{2(ac+3)}+\frac{14+(b-a-c)^2}{2(ac+3)}=\frac{(ac+2)}{2}+\frac{ac(1-ac)}{4(ac+3)}+\frac{7}{ac+3}$$

$=\dfrac{(ac-1)^2}{4(ac+3)}+\dfrac{13}{4}\ge\dfrac{13}{4}$.min P=$\dfrac{13}{4}$ khi a=c=1 và b=2

Câu 28: Cho các số thực $x,y,z\in[1,3]$ tìm max $P=\dfrac{x}{x^2+y^2+18z}+\dfrac{y}{(x+y)(3z+3)}-\dfrac{1}{9z}$

Bài giải

$x^2+y^2+18z-3(x+y)(z+1)=(3z-x)(3-x)+(3z-y)(3-y)\ge 0\to x^2+y^2+18z\ge 3(x+y)(z+1)$

$$P\le\frac{x}{3(x+y)(z+1)}+\frac{y}{3(x+y)(z+1)}-\frac{1}{9z}=\frac{1}{3(z+1)}-\frac{1}{9z}\le\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\max P=\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{3}\right)^2\ khi: x=y=3; z=\frac{\sqrt3+1}{2}$$

Câu 29: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x,y,z\in[1;2]$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{6xyz(x-y+3)}{6+xy^2+2x}-\frac{x^3+6}{7(x^2+xz)}+x^2+z^2$$

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $(x-1)(x-2)(x+3)\le 0\Leftrightarrow x^3+6\le 7x$ (1)

Từ giả thiết ta lại có: $(y-1)(y-2)(x+3)\le 0\Leftrightarrow 6+xy^2+2x\le 3x(x-y+3)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $P\ge\dfrac{-1}{x+z}+2xz+x^2+z^2=(x+z)^2-\dfrac{1}{x+z}$

$2\le x+z\le 4\Rightarrow \text{MinP}=\dfrac{7}{2}$. $\text{"="}\Leftrightarrow(x;y;z)=(1;1;1);(1;2;1)$

Câu 30: Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ xy\ge 1\\ 4z^2(x+y-1)-x^2-y^2+2\ge 4xy\end{cases}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt z}{1+z\sqrt{xyz}}+z(xy+2)+\frac{z\sqrt z}{z+xy\sqrt{xy}}-z^2$$

Bài giải

Từ giả thiết ta sẽ có:

$4z^2(x+y-1)-x^2-y^2\ge 2xy+2(xy-1)\ge 2xy\Rightarrow 4z^2(x+y)\ge(x+y)^2+4z^2\ge 4z(x+y)\Rightarrow z\ge 1$

Từ đây ta suy ra: $(xy-1)(z-1)\ge 0\Leftrightarrow xyz+1\ge xy+z$

Từ đây ta sẽ có: $z(xy+2)-z^2\ge xyz+1\ge xy+z\ge xy+1$ (*)

$$xy\ge 1\Rightarrow z\sqrt{xyz}.\sqrt{\frac{(xy)^3}{z^2}}\ge(xy)^2.\sqrt z\ge 1\Rightarrow\frac{1}{1+z\sqrt{xyz}}+\frac{z}{z+xy\sqrt{xy}}\ge\frac{2}{}$$

Áp dụng (*) ta sẽ có $P\ge\dfrac{\sqrt z}{1+\sqrt{xyz}}+\dfrac{z\sqrt z}{z+xy\sqrt{xy}}+xy\ge\dfrac{2\sqrt z}{1+xy\sqrt z}+xy+1\ge\dfrac{2}{1+xy}+xy+1$

Xét hàm trên xy>=1 là $\Rightarrow$MinP=3, dấu bằng khi x=y=z=1

Câu 31: Cho $\begin{cases} x,y,z\in[0;1] \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\ln\left[\frac{(x+y+z)^3}{2}+\frac{2-3(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2+y^2+z^2+2}{4-xyz}$$

Bài giải

Từ giả thiết ta sẽ có:

$$(x-1)(y-1)(z-1)\le 0\Leftrightarrow xyz+x+y+z\le 2-xyz\le 2-\frac{xyz}{2}\Rightarrow 4-xyz\ge 2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2+y^2+z^2+2}{4-xyz}=-\frac{(x+y+z)^2}{4-xyz}\ge\frac{-(x+y+z)}{2}$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{(x+y+z)^3}{2}+\frac{2-3(x^2+^2+z^2)}{x+y+z}=\frac{(x+y+z)^3}{2}+\frac{8-3(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$=\frac{(x+y+z)^3}{2}+\frac{8}{x+y+z}-3(x+y+z)\ge 4(x+y+z)-3(x+y+z)=x+y+z$$

Từ đây ta sẽ có: $P\ge\frac{1}{2}\ln(x+y+z)-\frac{x+y+z}{2}$

Xét hàm trên $\sqrt{3(xy+yz+zx)}\le x+y+z\le 2-xyz\Rightarrow\sqrt{3}\le x+y+z\le 2$

Suy ra min P=$\frac{1}{2}\ln 2-1$ dấu bằng khi $\begin{cases} x=y=1 \\ z=0 \end{cases}$ (và các hoán vị)

Câu 32: Cho các số thực $a,b,c\in\left(\frac{2}{3};1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P=\frac{9(ab)^{\frac{2}{3}}}{a^2+3b^2+c^2+1}+\frac{16b\sqrt{c}}{2a^2+4b^2+c^2+1}-\frac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4}$$

Bài giải

Áp dụng Bđt am_gm và cauchy_schwart ta có $16b\sqrt{c}\le(2b+c+1)^2$ và $9(ab)^{\frac{2}{3}}\le(a+b+1)^2$

Do đó $P\le\frac{(a+b+1)^2}{a^2+3b^2+c^2+1}+\frac{(2b+c+1)^2}{2a^2+4b^2+c^2+1}-\frac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4}$

Mặt khác ta có $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+1}\ge\frac{(a+b+1)^2}{a^2+3b^2+c^2+1}$

Và $\dfrac{(2b+c+1)^2}{2a^2+4b^2+c^2+1} \le \dfrac{b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{2b^2}+\dfrac{1}{a^2+1}$

Do đó $P \le \dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}-\dfrac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4}$ mặt khác với mọi a,b dương và $ab \le 1$ta có:

$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1} \le \dfrac{2}{ab+1} \Leftrightarrow \dfrac{(ab-1)(a-b)^2}{(ab+1)(a^2+1)(b^2+1)} \le 0$ đúng . ngoài ra lưu ý rằng :

$18ab-9a-9b+4 = 2(3a-2)(3b-2)+(3a-2)+(3b-2)$ do đó:

$\dfrac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4} = \dfrac{\dfrac{2}{3a-2}+\dfrac{2}{3b-2}}{\dfrac{1}{3a-2}+\dfrac{1}{3b-2}+2} \ge \dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)}}}{\dfrac{2}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)}}+2} = \dfrac{2}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)}+1}$ từ các đánh giá trên

suy ra $P \le \dfrac{5}{2}+\dfrac{2}{ab+1}-\dfrac{2}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)}+1}$ tiếp theo từ $(a-1)(a-2) \ge 0 \Rightarrow a^2 \ge 3a-2$ tương tự $b^2 \ge 3b-2$

nhân vế vế suy ra $ab \ge \sqrt{(3a-2)(3b-2)}$ từ đây kết luận $P \le \dfrac{5}{2}$ dấu=khi a=b=c=1

<u>Câu 33:</u> Cho $x,y,z \in [0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2}+\frac{1}{z^2+x^2+2}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

<u>Bài giải</u>

Ta có $x^2+y^2+2 = (x^2+1)+(y^2+1) \ge 2(x+y), \ldots; \sqrt{xy} \le \dfrac{xy+1}{2}, \ldots$

Nên $P \le \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}+xy+yz+zx+3\right]$.

Ta có $(x+y+z)(xy+yz+zx) \ge 9xyz$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz \ge \dfrac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x} = \dfrac{(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$= \dfrac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \dfrac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)} = \dfrac{27}{8(xy+yz+zx)}+\dfrac{3}{8}$

Suy ra $P \le \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{27}{8(xy+yz+zx)}+xy+yz+zx+\dfrac{27}{8}\right]$

Đặt $t = xy+yz+zx$. Do $x,y,z \in [0;2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \ge 0 \Leftrightarrow xy+yz+zx \ge \dfrac{4+xyz}{2} \ge 2 \Rightarrow t \ge 2$

Mặt khác: $xy+yz+zx \le \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3 \Rightarrow t \le 3$.Vậy $t \in [2;3]$

Ta có $P \le \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8t}+t+\frac{27}{8}\right]=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t\in[0;2]$ ta có $f'(t)=\frac{1}{2}\left[t-\frac{27}{8t^2}\right]=\frac{8t^3-27}{16t^2}>0\ \forall t\in[2;3]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;3]$. $\Rightarrow f(t)\le f(3)=\frac{15}{4}$.

Do $P\le f(t)\Rightarrow P\le\frac{15}{4}$. Có $P=\frac{15}{4}$ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Câu 34: Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn [0; 1]. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1$$

Bài giải

Do vai trò a, b, c như nhau nên giả sử a ≤ b ≤ c, khi đó:

Đặt $S=a+b+c+1\Rightarrow b+c+1=S-a\ge S-c; a+c+1\ge S-c; a+b+1\ge S-c$

Ta có $(1-a)(1-b)(1+a+b)\le 1\Leftrightarrow(1-a-b+ab)(1+a+b)\le 1\Leftrightarrow b(a+b)(a-1)-a^2\le 0$ (đúng)

Mà $(1-a)(1-b)(S-c)\le 1\Rightarrow(1-a)(1-b)\le\frac{1}{S-c}\Leftrightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{1-c}{S-c}$

Do đó $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{a}{S-c}+\frac{b}{S-c}+\frac{c}{S-c}+\frac{1-c}{S-c}\le\frac{S-c}{S-c}=1$

Câu 35: Cho các số thực*a, b, c* thuộc [4; 6] và thỏa mãn điều kiện *a* + *b* + *c* = 15. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+30abc+180}{ab+bc+ca}-\frac{1}{20}abc$$

Bài giải

Ta có $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+30abc$

Do đó $P=\frac{(ab+bc+ca)^2+180}{ab+bc+ca}-\frac{1}{20}abc$. Đặt $t=ab+bc+ca$

Ta có $(a-4)(b-4)(c-4)\ge 0\Leftrightarrow abc+16(a+b+c)-4(ab+bc+ca)-64\ge 0\Leftrightarrow abc\ge 4t-176$

$$\Rightarrow P\le\frac{t^2+180}{t}-\frac{1}{4}t+\frac{44}{5}=\frac{4}{5}t+\frac{180}{t}+\frac{44}{5}$$

Ta có $(a-6)(b-6)(c-6)\le 0\Leftrightarrow abc+36(a+b+c)-6(ab+bc+ca)-216\le 0\Leftrightarrow abc\le 6t-324$

Kết hợp $\begin{cases}abc\ge 4t-176\\ abc\le 6t-324\end{cases}\Rightarrow 4t-176\le 6t-324\Leftrightarrow t\ge 74$

Ta có $15^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow 15^2 \geq 3t \Leftrightarrow t \leq 75 \Rightarrow t \in [74;75]$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5}$ với $t \in [74;75] \Rightarrow f'(t) = \frac{4}{5} - \frac{180}{t^2} = \frac{4t^2 - 900}{5t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 15$

$\Rightarrow f(t) \geq f(15) = 35$ khi $a = 4, b = 5, c = 6$

Câu 36: Cho $x, y, z \in [0;2]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{1}{y^2 + z^2 + 2} + \frac{1}{z^2 + x^2 + 2} + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Bài giải

Ta có: $x^2 + y^2 + 2 = (x^2 + 1) + (y^2 + 1) \geq 2(x + y), \ldots..; \sqrt{xy} \leq \frac{xy + 1}{2}, \ldots.$

Nên $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + xy + yz + zx + 3\right]$

Ta có $(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)} = \frac{27}{8(xy+yz+zx)} + \frac{3}{8}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8(xy+yz+zx)} + xy + yz + zx + \frac{27}{8}\right]$

Đặt $t = xy + yz + zx$

Do $x, y, z \in [0;2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \frac{4 + xyz}{2} \geq 2 \Rightarrow t \geq 2$

Mặt khác: $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^3 = 3 \Rightarrow t \leq 3$. Vậy $t \in [2;3]$

Ta có $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8t} + t + \frac{27}{8}\right] = f(t)$

Xét hàm số f(t) với $t \in [0;2]$ ta có $f'(t) = \frac{1}{2}\left[t - \frac{27}{8t^2}\right] = \frac{8t^3 - 27}{16t^2} > 0 \forall t \in [2;3]$ nên hàm số f(t) đồng biến

trên $[2;3]. \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{15}{4}$

Do $P \leq f(t) \Rightarrow P \leq \frac{15}{4}$. Có $P = \frac{15}{4}$ khi $x = y = z = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$

Câu 36: Cho 3 số thực x, y, z thuộc đoạn [1;4] và thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{z}{8\left(x^2+y^2\right)}+\frac{x^2+y^2-1}{xyz}$

Bài giải

Ta có $T=\frac{z}{8\left(x^2+y^2\right)}+\frac{x^2+y^2-1}{xyz}=\frac{z}{8\left(x^2+y^2\right)}+\frac{x^2+y^2}{xyz}-\frac{1}{xyz}$

Với x, y, z thuộc đoạn [1;4] và thỏa mãn x + y +z = 6 ta có $\frac{x^2+y^2}{xy}\ge 2$

$(x-1)(y-1)=xy-x-y+1\ge 0\Rightarrow xy\ge x+y-1=5-z\Rightarrow \frac{-1}{xyz}\ge\frac{-1}{(5-z)z}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(6-z)^2-2xy\le(6-z)^2-2(5-z)=z^2-10z+36$

$\Rightarrow T\ge\frac{z}{8\left(z^2-10z+26\right)}+\frac{2}{z}-\frac{1}{z(5-z)}$

Xét hiệu $\left[\frac{z}{8\left(z^2-10z+26\right)}+\frac{2}{z}-\frac{1}{z(5-z)}\right]-\frac{1}{2}=\frac{(z-4)^2\left(4z^2-45z+117\right)}{8z(5-z)\left(z^2-10z+26\right)}\ge 0\forall z\in[1;4]$

Do đó $T\ge\frac{1}{2}$. Với $x=y=1,z=4\Rightarrow T=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $MinT=\frac{1}{2}$